

Beyond the Copula: A Survey of Artificial Intelligence Methods for Modeling Reserve Dependence in Non-Life Insurance

Au-delà de la copule : Modèles d'intelligence artificielle et Copules Neuronales pour la modélisation de la dépendance des provisions en assurance non-vie

Hajar ETTAYA^{#1}, Tarek ZARI^{*2}

#Laboraty of Applied Modeling in Economics and Management, Hassan II University

Casablanca, Morocco

¹hajarettaya@gmail.com

³profzari@gmail.com

Résumé — Les copules traditionnelles, bien qu'ayant révolutionné la modélisation des dépendances en séparant les structures marginales des structures conjointes, présentent des limitations fondamentales face à des dépendances complexes, asymétriques ou de grande dimension. Cet article examine dans quelle mesure les modèles d'apprentissage automatique et les copules neuronales peuvent surmonter ces limitations. À travers une analyse synthétique des développements récents — incluant les réseaux d'estimation paramétrique IGNIS, les modèles GARCH-RBM, les copules neuronales profondes et les réseaux à noyaux spectraux imbriqués de copules — nous démontrons que les approches neuronales offrent une flexibilité sans précédent pour capturer des structures que les copules classiques ne peuvent reproduire. Toutefois, cette supériorité expressive s'accompagne de défis en matière d'interprétabilité, de stabilité numérique et de garanties théoriques. Nous concluons que l'hybridation entre rigueur statistique et puissance représentative des réseaux de neurones constitue la voie la plus prometteuse pour la Modélisation des dépendance complexes.

Mots Clefs — *copules neuronales, apprentissage automatique, structures de dépendance, estimation paramétrique, modèles génératifs, GARCH, RBM*

Abstract—Traditional copulas, although they have revolutionized dependence modeling by separating marginal structures from joint structures, present fundamental limitations when faced with complex, asymmetric, or high-dimensional dependencies. This paper examines to what extent machine learning models and neural copulas can overcome these limitations. Through a synthetic analysis of recent developments — including IGNIS parametric estimation networks, GARCH-RBM models, deep neural copulas, and copula-nested spectral kernel networks — we demonstrate that neural approaches offer unprecedented flexibility for capturing structures that classical copulas cannot reproduce. However, this expressive superiority comes with challenges in terms of interpretability, numerical stability, and theoretical guarantees. We conclude that hybridization between statistical rigor and the representative power of neural networks constitutes the most promising path for modeling complex dependencies.

Keywords— *neural copulas, machine learning, dependence structures, parametric estimation, generative models, GARCH, RBM*

I. INTRODUCTION

La modélisation des dépendances entre variables aléatoires constitue un défi central en statistique et en apprentissage automatique. Depuis leur introduction, les copules ont apporté une avancée majeure en permettant de découpler la modélisation des distributions marginales de celle de la structure de dépendance

jointe. Cette propriété a fait des copules un outil privilégié en finance, en hydrologie, en épidémiologie et dans de nombreux autres domaines où les relations entre variables sont non linéaires et asymétriques.

Cependant, les copules paramétriques traditionnelles — qu'elles soient de la famille elliptique (Gaussienne, Student), archimédienne (Clayton, Gumbel, Frank, Joe) ou de leurs extensions — reposent sur des hypothèses restrictives quant à la forme de la dépendance. Par exemple, la copule de Clayton capture une dépendance asymétrique dans la queue inférieure, tandis que celle de Gumbel modélise une dépendance dans la queue supérieure, mais aucune ne peut simultanément représenter les deux. De plus, les copules traditionnelles peinent à s'adapter à des données de grande dimension en raison de la malédiction de la dimensionnalité et de la complexité croissante des structures de dépendance.

Dans ce contexte qu'émergent les modèles d'apprentissage automatique appliqués aux copules. Ces approches neuronales promettent de surmonter les limitations des copules classiques en apprenant directement des structures de dépendance complexes à partir des données, sans être contraintes par une forme paramétrique prédéfinie. Cet article vise à répondre à la question suivante: **Dans quelle mesure les modèles d'apprentissage automatique et les copules neuronales peuvent-ils saisir des structures de dépendance complexes que les copules traditionnelles ne peuvent pas reproduire?**

Pour y répondre, nous organisons notre analyse comme suit. La section 2 rappelle les fondements des copules traditionnelles et identifie leurs limites. La section 3 présente les principales architectures neuronales pour la modélisation des dépendances. La section 4 évalue de manière critique la capacité de ces modèles à capturer des structures complexes. Enfin, la section 5 discute les implications et ouvre des perspectives de recherche.

II. COPULES TRADITIONNELLES : FONDEMENTS ET LIMITATIONS

Une copule est une fonction de répartition multidimensionnelle définie sur l'hypercube unité $[0,1]^d$, dont les marges suivent une loi uniforme sur $[0,1]$.

$C : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ est une copule si vérifie :

$$C(u, 0) = 0 \text{ et } C(0, v) = 0$$

$$C(u, 1) = u \text{ et } C(1, v) = v$$

Pour tous $u_1 \leq u_2$ et $v_1 \leq v_2$:

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0$$

Toute fonction de répartition jointe peut s'écrire comme une composition d'une copule et des distributions marginales. (Théorème de Sklar (1959))

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))$$

où :

F est la fonction de répartition jointe

C est la copule

F_i est la fonction de répartition marginale de la variable x_i

Cette décomposition permet de modéliser séparément les comportements individuels et la structure de dépendance.

Les familles paramétriques classiques incluent :

- **Copules elliptiques** : Gaussienne (dépendance symétrique, pas de dépendance extrême) et Student (dépendance symétrique dans les queues)
- **Copules archimédiennes** : Clayton (queue inférieure), Gumbel (queue supérieure), Frank (dépendance symétrique, queues légères), Joe (queue supérieure prononcée)

III. MODÈLES D'APPRENTISSAGE AUTOMATIQUE POUR LES COPULES

1) *Taxonomie des approches neuronales*

La littérature récente propose plusieurs architectures neuronales pour la modélisation des dépendances, que l'on peut classer selon leur objectif :

Estimateurs paramétriques neuronaux : apprentissage d'une correspondance directe entre des statistiques observables et le paramètre d'une copule paramétrique (ex. IGNIS)

- **Générateurs de copules** : apprentissage de la fonction génératrice ou de la densité de copule directement à partir des données (ex. ACNet, copules neuronales)
- **Modèles hybrides** : intégration de copules dans des architectures profondes pour des tâches spécifiques (ex. Deep Copula Classifier, COPNN)
- **Alternatives non paramétriques** : remplacement de la copule par un réseau neuronal stochastique (ex. GARCH-RBM)

2) *IGNIS : estimation neuronale robuste*

Le réseau IGNIS (Aich et al., 2025) propose une approche radicalement différente de l'estimation paramétrique. Au lieu de maximiser une vraisemblance instable, IGNIS apprend une fonction directe :

$$\theta_{\text{sortie}} = \ln(1 + e^z) + 1$$

Avec :

$$\theta_{\text{sortie}} = \text{la valeur finale du paramètre (toujours } \geq 1)$$

Le réseau GNIS réduit significativement l'erreur d'estimation par rapport à la méthode des moments, particulièrement pour les familles A1 et A2 où les méthodes classiques échouent. Sur des données financières (rendements AAPL-MSFT), environnementales (PM2.5) et de santé (indicateurs de diabète), IGNIS produit des estimations stables et précises.

Cependant, IGNIS reste limité aux copules archimédiennes paramétriques existantes. Il n'apprend pas de nouvelles structures de dépendance, mais estime de manière robuste les paramètres de structures connues.

3) *Copules neuronales profondes: le génératif comme alternative*

Une autre approche consiste à paramétrer directement la copule par un réseau de neurones. Le Deep Copula Classifier (DCC) proposé par Aich, Aich et Wade (2025) illustre cette direction. Le DCC est un modèle génératif qui sépare l'apprentissage des distributions marginales de celui de la structure de dépendance, cette dernière étant modélisée par un réseau de neurones.

Les garanties théoriques du DCC sont remarquables. Sous des conditions standard, le classifieur converge vers le classifieur bayésien optimal avec un taux de convergence explicite $1 / n^{\{ r / (2r + d) \}}$ pour des densités de copule « r-lisses ». De plus, le DCC peut s'adapter à des dimensions élevées via des architectures vine ou factor copulas.

Parmi les autres contributions notables, citons :

- ACNet: apprentissage de fonctions génératrices complètement monotones, permettant d'approcher des copules existantes ou d'en créer de nouvelles
- Copule neuronale (NC): intégration des propriétés des copules directement dans la fonction de perte d'un réseau

4) *Modèles hybrides: RBM et réseaux à noyaux spectraux*

Deux innovations récentes méritent une attention particulière.

GARCH-RBM (Restricted Boltzmann Machine): Loro (2024) propose de remplacer la copule dans le cadre GARCH-Copula par une RBM, un réseau stochastique à deux couches. Les avantages sont multiples:

- Passage à l'échelle: la RBM gère efficacement un grand nombre d'actifs (contrairement aux copules)
- Modélisation des queues: meilleure capture des événements extrêmes, particulièrement lorsque l'entraînement se fait sur des périodes non extrêmes
- Interprétabilité: les poids des neurones cachés révèlent des structures de dépendance par classes d'actifs
- GARCH-RBM obtient des performances comparables ou supérieures aux GARCH-Copule en termes de backtesting VaR et de CRPS (Continuous Ranked Probability Score).

CokeNet (Copula-Nested Spectral Kernel Network) : Tian et al. (2024) proposent de redéfinir la densité spectrale d'un réseau à noyau spectral en utilisant une forme de copule.

La densité spectrale estimée pour la composante k , notée σ_k chapeau indice k , est égale à l'exponentielle de $\varphi_c(z_k)$ divisée par la somme des exponentielles de $\varphi_c(z_j)$ pour j allant de 1 à K .

$$\hat{\sigma}_k = \exp(\varphi_c(z_k)) / [\exp(\varphi_c(z_1)) + \exp(\varphi_c(z_2)) + \dots + \exp(\varphi_c(z_K))]$$

$\hat{\sigma}_k$ (σ chapeau indice k) = densité spectrale estimée pour la composante k (mesure de l'intensité du signal à une certaine fréquence)

φ_c = une fonction qui intègre une structure de copule (c'est le cœur de l'innovation)

z_k = la représentation latente (cachée) de la composante k dans l'espace spectral

K = nombre total de composantes spectrales

Cette formule assure que toutes les densités spectrales estimées sont comprises entre 0 et 1, et que leur somme totale est égale à 1 (comme des probabilités). La fonction φ_c avec la copule permet de capturer les dépendances complexes entre les différentes composantes spectrales.

5) Modèles à effets mixtes et marges arbitraires

Simchoni et Rosset (2025) introduisent COPNN (Copula-based neural networks), une architecture qui étend les modèles à effets mixtes au-delà de l'hypothèse gaussienne. COPNN combine :

- La flexibilité des copules gaussiennes pour capturer des structures de dépendance riches
- La puissance des réseaux profonds pour modéliser des marges non gaussiennes
- L'apprentissage par lots (batch learning) et la descente de gradient stochastique

IV. ÉVALUATION CRITIQUE

1) Modèles neuronaux capturent

La principale force des approches neuronales réside dans leur capacité à approximer n'importe quelle fonction continue (théorème d'approximation universelle). Pour les copules, cela signifie qu'un réseau suffisamment profond peut représenter des structures de dépendance arbitrairement complexes, y compris des mélanges de régimes, des asymétries multiples et des interactions non linéaires de haut niveau.

Avec une adaptation aux données de grande dimension. Alors que les copules paramétriques souffrent de la malédiction de la dimensionnalité, les architectures neuronales comme les RBM ou les réseaux variationnels peuvent apprendre des représentations compactes de dépendances en haute dimension. Le GARCH-RBM de Loro (2024) illustre cette capacité sur des portefeuilles d'actifs nombreux.

Les copules classiques imposent un type spécifique de dépendance extrême (queue inférieure pour Clayton, queue supérieure pour Gumbel). Les réseaux neuronaux peuvent apprendre la forme exacte des queues à partir des données, sans hypothèse préalable. Toutefois, cette flexibilité a un prix: l'estimation des queues reste statistiquement difficile, et les réseaux peuvent surajuster sur des événements rares.

Toutefois, l'intégration de couches récurrentes (LSTM, GRU) ou de mécanismes d'attention permet aux modèles neuronaux de capturer des structures de dépendance variant dans le temps, là où les copules classiques supposent la stationnarité.

Par contre, les copules neuronales ne sont pas immunes contre les problèmes numériques. Herbert (2025) rapporte que l'entraînement de copules neuronales peut être instable, nécessitant un réglage minutieux des hyperparamètres, et que dans certains scénarios de test, les copules neuronales ne surpassent pas les méthodes classiques. De plus, la fonction de perte doit être soigneusement conçue pour garantir que la sortie du réseau soit bien une copule valide (marges uniformes, propriétés de croissance, etc.).

2) Synthèse comparative

La comparaison entre les copules traditionnelles et les approches neuronales révèle des compromis fondamentaux sur plusieurs axes. En matière de flexibilité structurelle, les copules classiques restent confinées à une famille paramétrique prédéfinie, tandis que les modèles neuronaux bénéficient du théorème d'approximation universelle, leur permettant de représenter des structures de dépendance arbitrairement complexes. Concernant le passage à l'échelle, les copules traditionnelles peinent au-delà d'une dizaine de variables ($d \leq 10$ typiquement) en raison de la malédiction de la dimensionnalité, alors que les architectures neuronales, selon leur conception, offrent des performances allant de bonnes à excellentes, notamment via les RBM ou les réseaux variationnels. L'interprétabilité constitue l'avantage le plus net des copules paramétriques, dont les paramètres possèdent une signification intuitive (par exemple, le paramètre θ d'une copule de Gumbel quantifie la dépendance de queue supérieure). À l'inverse, les modèles neuronaux restent faiblement à modérément interprétables, malgré des efforts récents d'analyse des poids cachés. Sur le plan des garanties théoriques, les copules traditionnelles bénéficient d'une théorie statistique mature incluant consistance et normalité asymptotique des estimateurs, alors que les approches neuronales n'offrent que des résultats émergents, à l'instar des taux de convergence établis pour le Deep Copula Classifier. L'estimation des queues de distribution révèle une opposition similaire : les copules classiques imposent une forme spécifique propre à chaque famille (queue inférieure pour Clayton, supérieure pour Gumbel), tandis que les réseaux neuronaux offrent une flexibilité précieuse mais au prix d'un risque de surajustement sur les événements rares. En matière de robustesse numérique, les copules traditionnelles présentent une performance variable, avec des pathologies sévères documentées pour certaines familles comme A1 et A2 ; les modèles neuronaux, quant à eux, font preuve d'une bonne robustesse lorsque l'architecture est adaptée, comme c'est le cas avec IGNIS dont la contrainte intégrée garantit des estimations stables. Enfin, le coût computationnel oppose radicalement les deux approches : faible pour les copules paramétriques, il devient élevé, voire très élevé, pour l'entraînement des réseaux de neurones, ce qui peut constituer un frein dans des applications temps réel. En somme, aucun des deux paradigmes ne domine l'autre sur l'ensemble des critères ; le choix dépend nécessairement du contexte applicatif et des priorités du modélisateur.

Critère	Copules traditionnelles	Modèles neuronaux
Flexibilité structurelle	Limitée à une famille paramétrique	Très élevée (approximation universelle)
Passage à l'échelle (dimension)	Médiocre ($d \leq 10$ typiquement)	Bon à excellent (selon architecture)
Interprétabilité	Excellente	Faible à modérée

Garanties théoriques	Matures (consistance, asymptotique)	Émergentes (quelques résultats récents)
Estimation des queues	Spécifique à la famille	Flexible mais risqué (surajustement)
Robustesse numérique	Variable (pathologique pour A1/A2)	Bonne si architecture adaptée (ex. IGNIS)
Coût computationnel	Faible	Élevé à très élevé

V. CONCLUSION

Les modèles d'apprentissage automatique et les copules neuronales représentent une avancée significative dans la modélisation des structures de dépendance complexes. Ils surpassent les copules traditionnelles sur plusieurs aspects cruciaux : flexibilité expressive, passage à l'échelle en grande dimension, et capacité à s'adapter aux données sans hypothèses paramétriques restrictives. Les architectures récentes comme IGNIS, DCC, GARCH-RBM, COPNN ou CokeNet illustrent la diversité et la maturité croissante de ce champ.

Cependant, les copules neuronales ne constituent pas une panacée. Leurs limitations — interprétabilité réduite, exigences computationnelles élevées, risque de surajustement — les rendent moins adaptées à certains contextes. De plus, la supériorité empirique des approches neuronales n'est pas toujours démontrée, comme le rappelle Herbert (2025) .

La réponse à notre question initiale est donc positive, mais conditionnelle : les modèles d'apprentissage automatique peuvent saisir des structures que les copules traditionnelles ne peuvent reproduire, à condition de disposer de données suffisantes, d'une architecture adaptée et d'une validation rigoureuse. L'avenir de la modélisation des dépendances réside probablement dans une hybridation intelligente, où la puissance des réseaux de neurones est canalisée par la rigueur de la théorie statistique des copules.

VI. RÉFÉRENCES

- [1] Aich, A., et al. (2025). IGNIS: A Neural Network Framework for Robust Parameter Estimation in Archimedean Copulas. arXiv preprint, arXiv:2505.22518.
- [2] Aich, A., Aich, A. B., & Wade, B. (2025). Theoretical Foundations of the Deep Copula Classifier: A Generative Approach to Modeling Dependent Features. arXiv preprint, arXiv:2505.22997.
- [3] Herbert, J. (2025). Neural vs. Classical Copulas: Integrating Financial Dependence into Monte Carlo Simulation. Master's thesis, Umeå University.
- [4] Loro, P. (2024). On GARCH-Copula Limitations: A Novel Approach using GARCH-Restricted Boltzmann Machine. Master's thesis, Politecnico di Milano.
- [5] Tian, J., Xue, H., Xue, Y., & Fang, P. (2024). Copula-Nested Spectral Kernel Network. Proceedings of the 41st International Conference on Machine Learning, PMLR 235:48280-48294.
- [6] Simchoni, G., & Rosset, S. (2025). Flexible Copula-Based Mixed Models in Deep Learning: A Scalable Approach to Arbitrary Marginals. AISTATS 2025.
- [7] Trivedi, P. K., & Zimmer, D. M. (2009). Pitfalls in Modelling Dependence Structures: Explorations with Copulas. In *The Methodology and Practice of Econometrics*, Oxford University Press, 149-172.
- [8] Nelsen, R. B. (2006). *An Introduction to Copulas* (2nd ed.). Springer.

- [9] Genest, C., & Rivest, L.-P. (1993). Statistical Inference Procedures for Bivariate Archimedean Copulas. *Journal of the American Statistical Association*, 88(423), 1034-1043.
- [10] Hofert, M., et al. (2013). Pitfalls in the Estimation of Copula-Based Models. *Journal of Financial Econometrics*, 11(4), 677-705.