

# Synthèse d'une loi de commande pour la stabilisation des systèmes non linéaires : résultats et discussions

Madi Belgacem<sup>#\*<sup>1</sup></sup>, Tebbikh Hicham<sup>\*<sup>2</sup></sup>, Benchouia Nadjm Eddine<sup>#<sup>3</sup></sup>, Benadja Mounir<sup>♦<sup>4</sup></sup>

<sup>#</sup>Département de Génie Mécanique, Université 20 aout 1955 Skikda

Route d'Elhadaeik, BP.26, 21000 Skikda, Algérie

<sup>1</sup>b\_madi2000@yahoo.fr

<sup>3</sup>nedjemo41@yahoo.fr

<sup>\*</sup>Laboratoire d'Automatique et Informatique de Guelma

Université 8 mai 1945 Guelma, BP.401, 24000 Guelma, Algérie

<sup>2</sup>tebbikh@yahoo.com

<sup>♦</sup>Ecole de Technologie Supérieure (ETS)

Montréal, Québec, Canada

<sup>4</sup>mounir.benadja@ens.etsmlt.ca

<sup>♦</sup>Département de Génie Mécanique, Université Badji Mokhtar Annaba

BP.12, El-Hadjar, 23000 Annaba, Algérie

**Résumé** — Dans ce papier, nous avons étudié le problème de stabilisation des systèmes non linéaires de la forme  $\dot{x} = F(x) + Bu$  au voisinage d'une position d'équilibre de  $F(x)$ . La stratégie consiste en l'application de la théorie des variétés centrales, permettant de passer d'un système complexe à un système simple, de dimension réduit, facile à étudier. Des exemples illustratifs ont été discutés et validés numériquement afin de synthétiser une loi de commande stabilisatrice pour tels systèmes.

**Mots clés** — Systèmes non linéaires, commande, stabilisation, variété centrale, validation numérique.

## I. INTRODUCTION

Le problème de stabilisation des systèmes non linéaires a été marqué dans plusieurs travaux de recherche, parmi lesquels nous citons les travaux de Wilson [13], dans lesquels il a étudié la stabilité asymptotique, basée sur la théorie de Lyapunov [14]. Le problème *crucial* pour étudier la stabilité asymptotique est la construction d'une fonction de Lyapunov. Cette difficulté est indiquée par le résultat de Arnold [4] qui montre implicitement que : "même si un champ de vecteurs est polynomial, il n'existe pas de conditions algébriques sur les coefficients de ce champs de vecteurs pour étudier la stabilité asymptotique". Notamment, une fonction de Lyapunov pour un champ de vecteurs n'est pas forcément polynomiale. Ce résultat est lié aux problèmes des cycles pour une équation différentielle plane qui n'est pas soluble algébriquement. En 1976, La Salle [7] a présenté une étude permettant d'obtenir des conditions nécessaires et suffisantes de stabilisation des systèmes non linéaires.

En 1981, Carr [6] introduit la théorie des variétés centrales, dans un contexte plus général, qui permet d'analyser le comportement topologique d'une équation différentielle au voisinage d'une position d'équilibre. Les difficultés sont de

deux sortes : complexité des calculs et d'analyse de la stabilité locale dans la variété centrale. Ces résultats ont été utilisés par Aeyels [2] pour étudier la stabilisation asymptotique locale des systèmes non linéaires au voisinage d'une position d'équilibre, puis généralisés par Tebbikh [8] pour étudier le problème de stabilisation des systèmes polynomiaux homogènes et en particuliers quadratiques.

Les résultats de cette théorie ont été appliqués par Aeyels dans [1], [3] pour étudier le problème de stabilisation par retour d'état de la vitesse angulaire d'un corps rigide, puis généralisées par Madi dans [9] pour le problème de stabilisation asymptotique de la vitesse angulaire d'un satellite rigide gouvernés par des rétrofusées et validés numériquement dans [10] – [12]. Nous avons montré que, sous certaines conditions, le système étudié est asymptotiquement stable dans le cas de deux rétrofusées [10], mais cette stabilité n'est pas assurée dans le cas d'une seule rétrofusée.

Dans ce travail, nous allons basé sur les résultats théoriques obtenus et en particuliers ceux de Aeyels dans [2] afin de synthétiser, à travers une validation numérique, une loi de commande (linéaire et/ou non linéaire) asymptotiquement stabilisatrice pour des systèmes non linéaires commandés de la forme

$$\dot{x}(t) = F(x) + Bu \quad (1)$$

au voisinage d'une position d'équilibre stable de  $F(x)$ .

## II. VARIETES CENTRALES ET STABILISATION

Considérons le système non linéaire (1) et son linéarisé en (0,0) :

$$\dot{x} = Ax + Bu + f(x) \quad (2)$$

ou  $Ax$  est la partie linéaire de  $F(x, u)$ .

En effectuant un changement de base permettant la diagonalisation de la partie linéaire du système (2), on arrive (après une notation adéquate) au système :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_{11}x_1 + f_1(x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x}_2 &= A_{22}x_2 + f_2(x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x}_3 &= A_{33}x_3 + f_3(x_1, x_2, x_3) + Bu \end{aligned} \quad (3)$$

avec  $A_{11}$  a des valeurs propres réelles nulles (cas critique),  $A_{22}$  et  $A_{33}$  ont des valeurs propres a parties réelles négatives et  $(A_{33}, B)$  est une paire contrôlable. Les fonctions  $f_i(x_1, x_2, x_3), i = 1, 2, 3$  sont des termes d'ordres supérieures ou égale à 2. Ces termes disparaissent à l'origine.

Le problème est de construire une loi de commande stabilisatrice  $u = F(x_1, x_2, x_3)$  qui permet au système de revenir à zéro selon une trajectoire bien particulière appelée *variété centrale*.

Considérons l'espace propre  $E^c$  correspondant aux valeurs propres de  $A_{11}$  (où  $x_2 = x_3 = 0$ ). Alors, d'après [6], il existe une variété centrale  $W^c$  tangente à  $E^c$  représentée localement par le graphe

$$W^c = \{(x_1, h(x_1)); h(0) = Dh(0) = 0\} \quad (4)$$

avec  $h(x_1) = (h_1(x_1), h_2(x_1))$  définie dans les voisinages de la position d'équilibre stable.

La projection du champ de vecteurs de  $W^c$  dans  $E^c$  donne :

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + f_1(x_1, h_1(x_1), h_2(x_1)) \quad (5)$$

Puisque  $h(x_1)$  est tangente  $x_2 = x_3 = 0$  et les équations en termes de  $\dot{x}_2$  et  $\dot{x}_3$  sont asymptotiquement stable, alors la stabilité du système (3) est déterminée par celle de de l'équation (5). D'où le *Théorème 1* suivant.

**Théorème 1.** [6] *Si l'origine de (5) est localement asymptotiquement stable, alors l'origine de (3) est aussi localement asymptotiquement stable.*

### III. APPROXIMATION DE LA VARIETE CENTRALE

Pour calculer la variété centrale  $h(x_1) = (h_1(x_1), h_2(x_1))$  et la loi de commande correspondant  $u = F(x_1, x_2, x_3)$ , on replace  $x_2$  par  $h_1(x_1)$  et  $x_3$  par  $h_2(x_1)$  dans l'équation

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = Dh(x_1)\dot{x}_1 \quad (6)$$

avec les conditions aux limites

$$Dh(0) = h(0) = 0 \quad (7)$$

$h(x_1)$  est la solution de l'équation différentielle aux dérivées partielles (6). D'où le *Théorème 2* suivant.

**Théorème 2.** [6] *S'il existe une fonction  $\phi(x_1) = (\phi_1(x_1), \phi_2(x_1))$  avec  $\phi(0) = D\phi(0) = 0$ , qui satisfait l'équation différentielle aux dérivées partielles (6), alors :*

$$\begin{aligned} h_1(x_1) &= \phi_1(x_1) + O(|x_1|^p) \\ h_2(x_1) &= \phi_2(x_1) + O(|x_1|^p) \end{aligned} \quad (8)$$

où  $O(|x_1|^p)$  sont les termes d'ordre supérieure à  $p(p > 1)$ .

Le système (5) s'écrit alors :

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + f_1(x_1, \phi_1(x_1) + O(|x_1|^p), \phi_2(x_1) + O(|x_1|^p)) \quad (9)$$

Il est évident que ce système est localement asymptotiquement stable *si et seulement si*

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + f_1(x_1, \phi_1(x_1), \phi_2(x_1)) \quad (10)$$

est localement asymptotiquement stable.

Sachant que la dynamique sur la variété centrale ( $x_2 = h_1(x_1), x_3 = h_2(x_1)$ ) est décrite par le système (10). Alors; le résultat essentiel de ce concept est le suivant :

**Proposition 1.** *Le système est localement asymptotiquement stable en zéro si et seulement si :*

- (i) *la variété centrale est localement exponentiellement attractive.*
- (ii) *L'origine est localement stable pour la dynamique sur la variété centrale.*

### IV. RESULTATS PRINCIPAUX

Dans ce paragraphe, nous rappelons les résultats théoriques obtenus par Brockett dans [5] et Aeyels dans [2], formulés d'une manière propositionnelle. Les applications de ces résultats ont fait l'objet de plusieurs travaux de recherche dans les domaines de l'engineering [1], [3], [9], [10] – [12] et en particulier la commande des systèmes non linéaires présentant des complexités de modélisation. L'application de la théorie des variétés centrales [6] à permis de passer d'un système (modèle mathématique de base) présentant des modes incontrôlables à un système réduit contrôlable possédant les mêmes caractéristiques.

Le premier résultat concerne le système étudié par Brockett dans [5], et appliqué, par la suite, par Aeyels dans [3] sur le mouvement d'un corps rigide en rotation et Madi dans [10] pour le problème de contrôle d'attitude d'un satellite rigide gouvernés par des rétrofusées. Ce systèmes est donné par le résultat suivant.

**Proposition 2.** [2] *Considérons le système, décrivant la rotation d'un corps rigide, suivant :*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2x_3 \\ \dot{x}_2 &= u \\ \dot{x}_3 &= v \end{aligned} \quad (11)$$

*Ce système est localement asymptotiquement stabilisable par la loi de commande non linéaire*

$$\begin{aligned} u &= -x_2 + \alpha x_1^2 \\ v &= -x_3 + \beta x_1^3 \end{aligned} \quad (12)$$

*si et seulement si  $\alpha\beta < 0$ .*

Comme il a été montré dans [9], il est facile de trouver d'autres lois commandes stabilisatrices pour le systèmes [11]. Prenons, par exemple, celui proposé par Brockett dans [5]. D'où la *Proposition 3*.

**Proposition 3.** [5] *Considérons le système (11) ci-dessus. Ce système est localement asymptotiquement stabilisable par la commande :*

$$\begin{aligned} u &= -x_2 + x_1 \\ v &= -x_3 - x_1^2 \end{aligned} \quad (12)$$

Le deuxième résultat concerne le système étudié par Aeyels dans [2] où il a montré que certains systèmes ne peuvent être stabilisables par des commandes linéaires, contrairement aux cas des contrôles non linéaires dont l'étude de la stabilité asymptotique fait l'objet d'une profonde étude. Ce résultat est résumé dans les propositions suivantes.

**Proposition 4.** [2] *Considérons le système (13) suivant :*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 x_3 \\ \dot{x}_2 &= u \end{aligned} \quad (13)$$

*Ce système est localement asymptotiquement stabilisable par la loi de commande non linéaire :*

$$u = -x_2 + \alpha x_1^2 \quad (14)$$

si et seulement si  $\alpha < 0$ .

**Proposition 4.** [2] *Considérons le système (13) ci-dessus. Ce système n'est pas stabilisable; indépendamment de  $\beta$ , par la loi de commande linéaire :*

$$u = -x_2 + \beta x_1 \quad (15)$$

#### V. RESULTATS DE SIMULATION

La simulation numérique va porter sur les systèmes décrits par les propositions 2,3,4 et 5 ci-dessus. L'objet principal est de voir le comportement dynamique de la solution des ces systèmes avant et après l'application de la théorie choisie ainsi que le rôle des lois de commande conduisant à la stabilisation de ces systèmes par l'intermédiaire d'une trajectoire particulière appelée variété centrale.

Les valeurs numériques sont choisies arbitrairement ( $t_{initial}, t_{final}, x_0$ ). Les coefficients liés à la variété centrale ( $\alpha$  et  $\beta$ ) sont choisis en fonction de la condition de convergence de la solution (i.e. conditions liées à la stabilisation du systèmes).

Les résultats de la simulation numérique sont donnés par les figures fig.1-fig.6. La justification de la théorie acquise pour l'étude de ces systèmes demande un passage conservatif du système original (modèle mathématique) au système équivalent (système réduit).

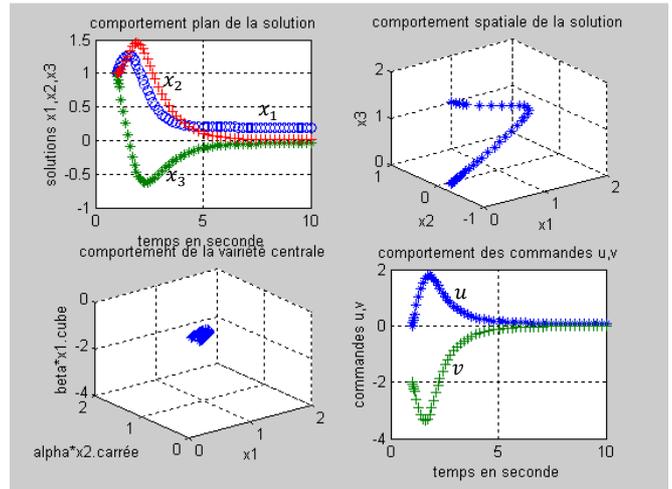


Fig.1 Simulation du système original (système(11), commande (12))

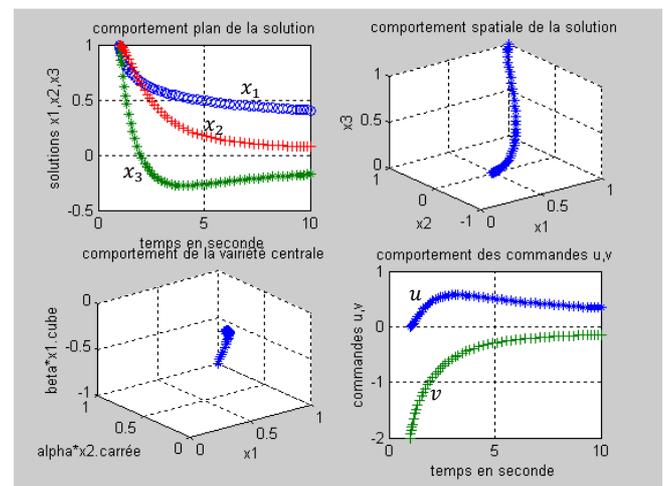


Fig.2 Simulation du système réduit équivalent au système (11)

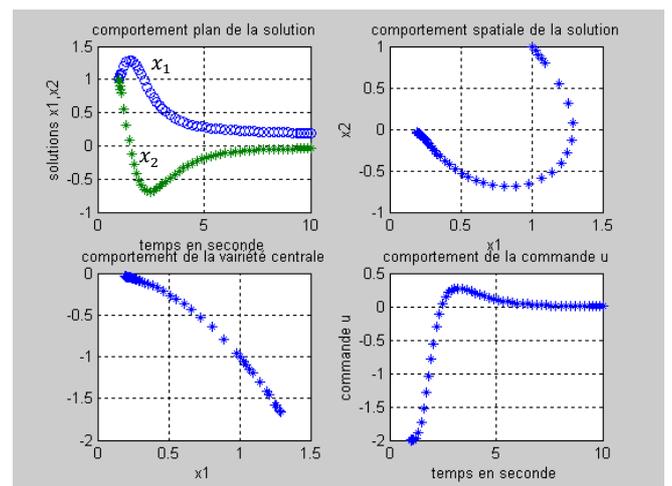


Fig.3 Simulation du système original (système(13), commande (14))

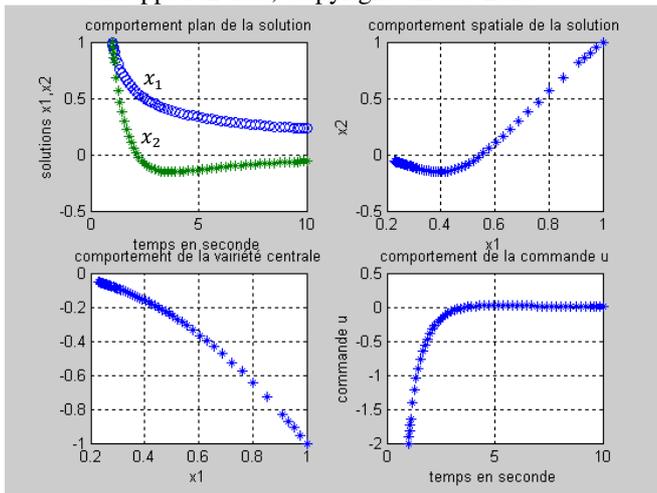


Fig.4 Simulation du système réduit équivalent au système (13)

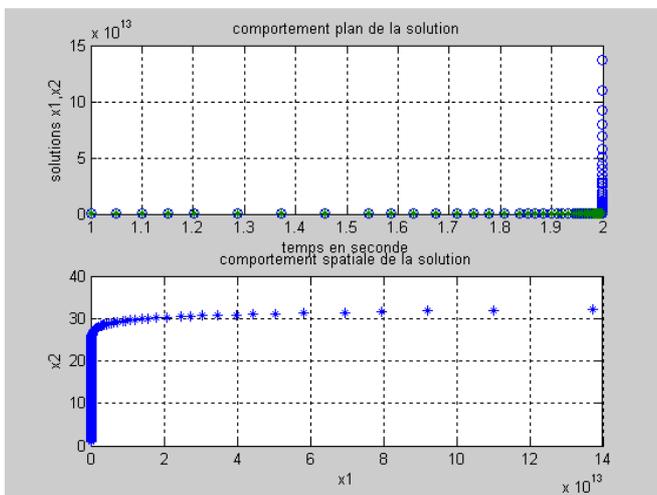


Fig. 5 Comportement de la solution du système réduit, équivalent au système (13), dans le cas où  $\beta > 0$

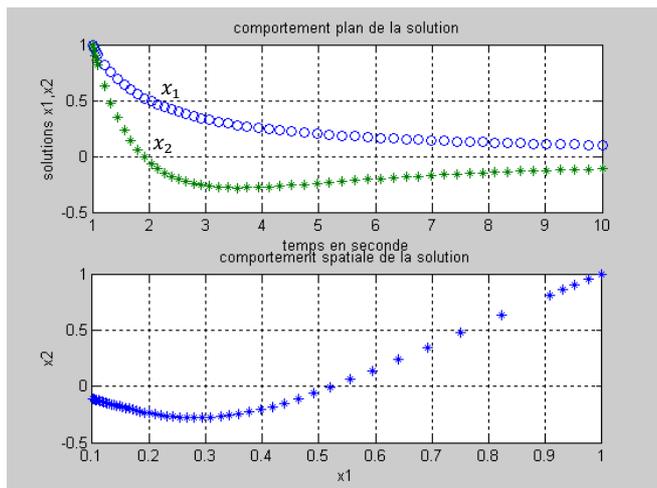


Fig. 6 Comportement de la solution du système réduit, équivalent au système (13), dans le cas où  $\beta < 0$

## VI. ANALYSE DES RESULTATS

Les figures Fig.1 et Fig.2 montrent, respectivement, le comportement dynamique de la solution, de la variété centrale et des lois de commande pour le système original ainsi que son équivalent (système réduit). Cette représentation montre que le schéma de passage est conservatif par le biais que le système réduit garde les mêmes caractéristiques que celui original (modèle mathématique). Les solutions représentent les trajectoires décrites par le système (11) bouclé par la loi de commande (12). L'analyse graphique montre que toutes les trajectoires convergent d'une manière asymptotique vers la position d'équilibre nulle en partant d'une valeur initiale quelconque. Ceci montre que le système en boucle fermée est localement asymptotiquement stable. Le comportement spatial de la solution et de la variété centrale montre la convergence de ses dernières vers la position d'équilibre. En effet, l'objet rejoint la variété centrale sur laquelle la dynamique est attractive par l'origine. Cette variété illustre le comportement local de la solution au voisinage de la position d'équilibre.

Le comportement des commandes montrent que ses derniers servent à ramener le système sur la variété centrale après quoi ils reviennent à la position d'équilibre stable.

Les figures Fig.3 et Fig.4, montrent au même titre que celles des figures Fig.1 et Fig.2, le comportement dynamique de la solution, de la variété centrale et des lois de commandes pour le système original ainsi que son équivalent réduit. Ces graphes sont tracés dans un plan (système à deux dimensions) et possèdent les mêmes caractéristiques que précédemment. D'où la même analyse.

Concernant le premier problème (*Proposition 5*), il a été montré dans [2] que ce système est instable indépendamment du paramètre de la loi de commande  $\beta$ , ce qui est en contradiction avec la validation numérique (Fig.5 et Fig.6). L'analyse graphique montre que la stabilité est assurée, indépendamment du paramètre  $\beta$ , par contre la stabilité asymptotique est assurée uniquement dans le cas où  $\beta < 0$ .

## VII. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

La stratégie de l'application de la théorie des variétés centrales pour les systèmes non linéaires permet de passer d'une forte formulation (Système original) à une faible formulation (système réduit équivalent) facile à simuler numériquement. Ce passage se fait avec conservation des caractéristiques (intrinsèques et extrinsèques) du système étudié. La validation numérique des résultats théoriques décrits dans la quatrième section montre que ses derniers répondent aux exigences du problème de stabilisation asymptotique des systèmes non linéaires (*i.e.* les systèmes étudiés sont localement asymptotiquement stabilisables par les lois de commandes proposés). Nous avons montré qu'on peut, à l'aide des commandes linéaires, stabiliser asymptotiquement des systèmes non linéaires.

L'une des perspectives est l'application de cette théorie pour les systèmes non linéaires perturbés sans prendre en compte les perturbations additives qui peuvent s'inscrire lors du fonctionnement de la structure considérée. Une deuxième

méthode, jugée intéressante, repose sur la théorie de guidage dont l'ordre de l'exécution est oblique. Cette méthode peut résoudre le problème sans prendre en compte une grande partie des perturbations additives. La troisième variante est celle considérant le cas le plus générale ou le système considéré présente des termes d'ordre fractionnaire. Cette théorie englobe en grande partie la stratégie de suivie et de contrôle du comportement dynamique des systèmes considérés.

#### REFERENCES

- [1] D. Aeyels, "Stabilization by smooth feedback of the angular velocity of a rigid body", *Systems and Control Letters*, vol.5, pp.59-63, 1985.
- [2] D. Aeyels, "Stabilization of a class of nonlinear systems by smooth feedback control", *Systems and Control Letters*, vol.5, pp.289-294, 1985.
- [3] D. Aeyels, "Stabilizability and asymptotic stabilizability of the angular velocity of a rigid body", *Systems and Control Letters*, vol.5, 1988.
- [4] V.I. Arnold, "Algebraic unsolvability of the problem of Lyapunov stability and the problem of topological classification of singular points of an analytic system of differential equations", *Func. An. and its applications*, vol.4, pp.173-180, 1970.
- [5] R. W. Brockett, *Asymptotic stability and feedback stabilization*, In Diff. Geometric Control, Ed. Brockett ans ., Birkhauser, 1983.
- [6] J. Carr, *Application of centre manifold theory*, Applied Mathematical Sciences, Vol.35, Springer-Verlag, 1981.
- [7] J. P. La Salle, *The stability of dynamical systems*, Z. arststein-Philadelphia: Society of Industrial Anal Applied mathematics, 1976.
- [8] H. Tebbikh, "Structure et commande des systèmes polynomiaux homogènes", Thèse de Doctorat, Laboratoire d'Automatique de grenoble, France, Oct. 1989.
- [9] B. Madi, "Contrôle d'attitude d'un satellite rigide gouverné par des rétrofusées", Thèse de Magister, Institut de Génie Mécanique, Université 8 mai 45 Guelma, Algérie, Mai 1999.
- [10] B. Madi et H. Tebbikh, "Etude théorique et simulation numérique de stabilisation par retour d'état de la vitesse angulaire d'un satellite rigide gouverné par deux rétrofusées", *Congrès National de Mathématique*, Annaba, Algérie, 1999.
- [11] B. Madi et H. Tebbikh, "Analyse et simulation du problème de stabilisation par retour d'état de la vitesse angulaire d'un satellite rigide gouverné par une seule rétrofusée", *2<sup>ème</sup> CNAMA*, Tebessa, Algérie, 2000.
- [12] B. Madi et H. Tebbikh, "Sur la stabilisation du mouvement d'un satellite rigide gouverné par des rétrofusées", *4<sup>ème</sup> Conférence Maghrébine sur les Equations Différentielles et leurs Applications*, Sétif, Algérie, 2001.
- [13] F. W. Wilson, "The structure of the level surfaces of Lyapunov function", *Journal of Differential Equations*, Vol.4, pp.323-329, 1967.
- [14] V. Zubov, *Methods of A. M. Lyapunov and their application*, Noordhoof, Amsterdam, 1964.