

Etude numérique de la convection naturelle au sein d'une cavité Bridgman vertical avec chauffage et refroidissement variables

Sliman MANAR¹, Hicham Rouijaa^{2*}, El Alami Semma¹ Mustapha El Alami³,

¹Laboratoire de Mécanique, Faculté des Sciences et Techniques, Université Hassan Ier

²Université Cadi Ayyad, Faculté Polydisciplinaire de Safi BP4162, Route Sidi Bouzid, Safi, Maroc.

³Groupe de Thermique, Département de Physique, Faculté des Sciences, Université Hassan II Aïn Chock, BP. 5366 Maarif, Casablanca, Maroc;

* hruijaa@hotmail.com

Résumé- Le travail que nous présentons dans ce papier est une suite d'une série de travaux menés pour l'étude numérique de la convection thermosolutale en phase fluide d'une cavité de croissance cristalline de type Bridgman verticale. Le but est d'étudier numériquement la convection naturelle au sein de la cavité avec chauffage et refroidissement variables. La cavité contient un fluide binaire caractérisé par un nombre de Prandtl $Pr = 0,01$

Les parois horizontales inférieure et supérieure de la cavité étudiée (Fig.1) sont portées respectivement aux températures chaudes (T_C) et froide (T_F). Ces températures sont uniformes et leurs amplitudes, variant sinusoidalement dans le temps, oscillent autour d'une valeur moyenne fixe. Les parois verticales sont portées à la même température que celle du bas sauf une zone considérée adiabatique du côté de la paroi froide.

Les équations de Navier-Stokes et l'équation de conservation de l'énergie sont résolues par une méthode de volumes finis de 2ème ordre en temps et en espace.

Les résultats, obtenus sont donnés pour $10^3 < Ra < 10^5$, $Pr = 0,01$. L'accent est mis sur l'effet des fréquences de modulation, les amplitudes des températures chaudes et froides et le nombre de Rayleigh sur l'écoulement et le transfert thermique.

Keywords: Convection naturelle, simulation numérique, fréquence de modulation, croissance cristalline

TABLE 1
NOMENCLATURE

g	Accélération gravitationnelle.	t	Temps adimensionné ($t'/(H^2/\alpha)$)
P	Pression	Ψ	Fonction de courant adimensionné (Ψ'/α)
Pr	Nombre de Prandtl	τ	Période de la température
RaT	Nombre de Rayleigh thermique	h	Coefficient de convection local $w/(m^2k)$
t	Temps adimensionnel.	Nu	Nombre de Nuselt
T	Température adimensionnelle	Q	Flux thermique, w/m^2
U	Vitesse adimensionnelle suivant la direction x	Ra	Nombre de Rayleigh = $(g\beta\Delta T'H^3/(\nu\alpha))$
V	Vitesse adimensionnelle suivant la direction y	μ	Viscosité dynamique (Kg/ms)
x,y	Coordonnées cartésiennes adimensionnelles	W'	Viscosité S-1
H'	Hauteur de la cavité	Ω	Vorticité adimensionnée = $w'H^2/\alpha$

L'	Largeur de la cellule	C	Fraction massique
QF	Densité de flux thermique dimensionnée à travers la paroi froide	D	Coefficient de diffusion massique
T	Température adimensionnée ($(T' - T'F)/\Delta T'$)		
$\Delta T'$	Différence de température ($T'c - T'F$)		
Symboles grecs		Indices	
a	Diffusivité thermique.	c	Chaud
b	Coefficient d'expansion thermique ou solutal	f	Froid
ν	Viscosité cinématique m^2/s	T	Thermique

I. INTRODUCTION

Industriellement, la forte demande en matériaux utilisés dans de nombreux dispositifs en électronique, optique et optoélectronique, a permis l'émergence de nouveaux cristaux adaptés et optimisés vis-à-vis d'une utilisation spécifique. La maîtrise des outils et des conditions de croissance cristalline s'avère primordiale pour l'obtention de cristaux de grande pureté et de haute qualité cristalline répondant aux objectifs recherchés. Le couplage entre la microstructure du cristal et l'écoulement dû à la convection thermosolutale dans la phase liquide au cours de la cristallisation a été démontré dans plusieurs travaux [1-3]. Dans la littérature l'étude de la convection thermosolutale dans les cavités rectangulaires a été effectuée pour plusieurs configurations géométriques (horizontale, verticale, inclinée, aplatie...). Différents scénarios de conditions aux limites thermiques et solutales (coopérants, opposés ou croisés) ont été investigués.

Dans cette étude nous nous sommes limités à l'étude du phénomène au niveau de la zone basse du procédé Bridgman et à l'influence de la modulation des températures chaude et froide sur l'écoulement et le transfert thermique dans cette zone qui ressemble à une cavité carrée. Ainsi nous réduisons notre investigation à l'étude du phénomène de l'écoulement et le transfert thermique dans cette cavité.

Le problème de la convection naturelle de fluides confinés dans des cavités a fait l'objet de nombreuses études. Une excellente revue des travaux effectués dans le passé dans ce domaine a été présentée par Ostrach [4] et Bejan [5]. Ces travaux indiquent clairement que la plus part des études disponibles dans ce domaine portent sur des écoulements convectifs en régime permanent, ce qui est le cas de la plupart des applications pratiques.

Les premières études portent sur le comportement instationnaire de la convection naturelle concernant le cas de cavité soumises à des conditions thermiques permanentes.

Pour cette situation, l'obtention de régime convectif transitoire, observé dans certaines conditions, est due à l'existence d'instabilités dynamiques au voisinage des parois [6-8] ainsi qu'à la formation d'instabilités thermiques [9]. De tels écoulements ont également été observés dans le cas de distributions spéciales de la température sur les parois de la cavité [10-11] ou pour des cavités de grandes extensions [12]. En ce qui concerne la convection naturelle transitoire induite par l'imposition de conditions thermiques sur la cavité variant dans le temps, il existe relativement peu de travaux disponibles dans la littérature. Parmi les premières contributions, on peut citer celle de Patterson et Imberger [13] qui ont étudié le cas d'une couche fluide initialement au repos dans une enceinte dont les parois verticales sont soumises à une variation brusque de la température à un instant donné. L'effet du refroidissement soudain d'une paroi verticale d'une cellule remplie d'un fluide initialement à température uniforme a été considéré par Nicolette et al [8]. Les résultats numériques sont en bon accord avec les mesures expérimentales obtenues par les mêmes auteurs.

Dans une étude numérique et analytique, Yang et al [14] ont analysé la réponse de l'écoulement dans une cavité verticale de grande extension dont l'une de ses parois verticales est soumise à une température qui varie périodiquement dans le temps. Pour des fréquences faibles et élevées, ils ont observé que les caractéristiques de l'écoulement s'accordent bien avec celle de la convection naturelle le long d'une plaque plane verticale soumise aux mêmes conditions thermiques. Kazmierczak et Chinoda [15] ont étudié la convection naturelle transitoire dans une cavité carrée due à une variation sinusoïdale de la température d'une paroi verticale chaude. La paroi opposée (froide) est maintenue à une température constante constamment inférieure à celle de la paroi verticale. Ils ont analysé les effets de la période et l'amplitude de la température oscillante à travers la paroi froide de la cavité. Toutes les solutions transitoires obtenues sont périodiques dans le temps, et montrent que, malgré la dépendance des conditions aux limites vis-à-vis du temps et les variations notables des champs d'écoulement et de température, le transfert de chaleur moyen (dans le temps) évalué sur un cycle est approximativement égal à la valeur obtenue lorsque la paroi chaude est maintenue à une température constante. Lage et Bejan [16] ont étudié numériquement et théoriquement la convection naturelle dans une cavité carrée refroidie isothermiquement sur un côté vertical alors que la paroi opposée est chauffée par un flux thermique pulsatoire. Ils ont montré que, pour une fréquence qui impose le flux de chaleur pulsé, la convection naturelle induite dans la cavité entre en résonance avec la température aux limites. Cette résonance est caractérisée par des fluctuations maximales du taux de transfert de chaleur à travers un plan vertical passant par le centre géométrique de la cellule. Ils ont observé également, en se basant sur les résultats numériques, que le phénomène de résonance existe dans la marge 0,01-7 du nombre de Prandtl et qu'il s'amplifie à mesure que le nombre de Rayleigh augmente.

En ce qui concerne le cas d'une cellule chauffée par le bas d'une façon transitoire, il semble que la première investigation faite sur cette configuration soit due à Mantle-Miller et al [17]. Dans cette étude expérimentale les auteurs ont examinés l'écoulement et le transfert de chaleur en convection naturelle dans le cas où la température de la paroi chaude varie périodiquement dans le temps autour d'une valeur moyenne, la paroi supérieure froide étant maintenue à une température constante et les parois verticales adiabatiques. L'amplitude des oscillations de la température imposée varie entre 3 et 0% de la différence des températures moyennes sur les parois thermiquement actives. Pour les variations faibles de la température excitatrice, il est montré que le transfert de chaleur moyen sur un cycle est comparable au transfert de chaleur permanent calculé à partir de la température moyenne de la paroi chaude. Cependant, pour les grandes modulations de la température, on peut observer les différences de l'ordre de 12% entre ces deux valeurs. Plus récemment, Lakhal et al [18- 19] ont étudié numériquement l'effet d'un chauffage variable sur la convection naturelle transitoire conduite dans une cavité carrée chauffée partiellement par le bas. L'effet de plusieurs paramètres dominants, à savoir : la position et la longueur de l'élément chauffant, l'amplitude et la période de la température excitatrice et le nombre de Rayleigh sur le transfert de chaleur et sur l'écoulement du fluide est analysé. Les conclusions principales concernent la période et l'amplitude de la quantité de chaleur qui quitte le système à travers sa paroi froide. Contrairement aux résultats obtenus par Kazmierczak et Chinoda [15], il semble que les solutions trouvées n'oscillent avec la même période que celle de la température excitatrice que pour les nombres de Rayleigh modérés. De plus pour une combinaison donnée des différents paramètres géométriques et thermodynamiques, une double périodicité de l'écoulement du fluide et du transfert de chaleur a été obtenue.

II. CONFIGURATION GÉOMÉTRIQUE ET MÉTHODE NUMÉRIQUE

La configuration étudiée dans ce travail est schématisée par Figure.1. Les parois horizontales inférieure et supérieure de la cavité sont portées respectivement aux températures chaude et froide. Les parois verticales sont portées à la même température que celle du bas sauf une zone considérée adiabatique du côté de la paroi froide. Cette zone de hauteur égale à $L_{ref}/4$ (avec $L_{ref} = H$, hauteur de la paroi) est conçue pour relaxer le déplacement de l'interface solide/liquide dans les configurations de croissance cristalline à tirage vertical. L'étude suivante portera sur un fluide de nombre de Prandtl $Pr=0.01$, la valeur de Rayleigh prise entre 10^3 et 10^5 .

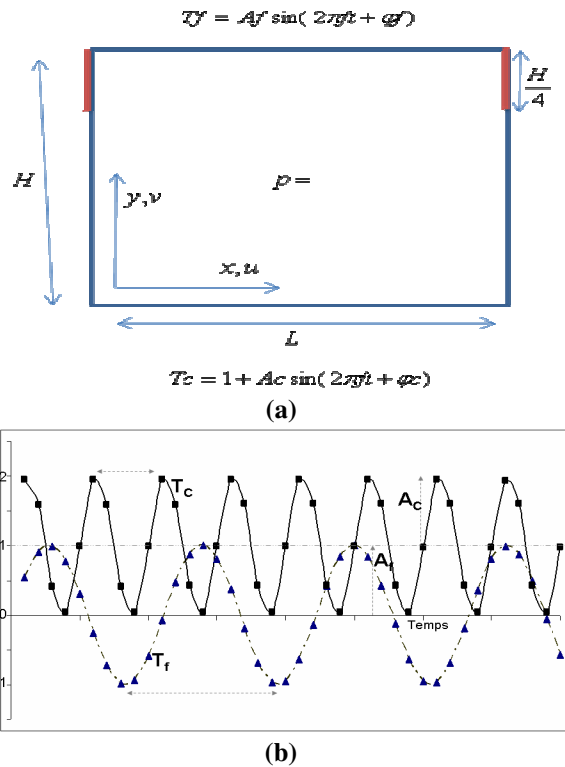


Figure 1 : (a) Configuration géométrique et conditions aux limites, (b) Profils des températures froide et chaude appliquées aux parois.

A. Mise en équations

L'écoulement résultant est supposé bidimensionnel (troisième dimension de la cavité suffisamment grande) et laminaire, et les propriétés du fluide sont considérées constantes. On néglige l'échauffement dû à la viscosité dans l'équation d'énergie car les vitesses en convection naturelle sont modérées. La variation de la masse volumique suivant la température est calculée en utilisant l'approximation de Boussinesq.

Les équations gouvernant ce problème sont ceux de Navier - Stokes associées à l'équation de l'énergie en régime non stationnaire.

Les nombres de Prandtl Pr et de Rayleigh Ra sont définis par:

$$Pr = \nu / \alpha$$

$$Ra = \frac{g \beta \Delta T H^3}{\nu \alpha}$$

Equation de continuité

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

Equations de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x} + Pr \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = - \frac{\partial P}{\partial y} + Pr \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

Equation de l'énergie :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (3)$$

B. Méthode numérique

Les équations (1) à (4) ont été adimensionnées en utilisant comme échelle caractéristique la hauteur H' de la cellule, la différence de température ($\Delta T = T'_C - T'_F$) entre les parois thermiques actives, la vitesse (α / H') et le temps (H'^2 / α), les équations primées désignent les grandeurs dimensionnelles.

Les conditions aux limites hydrodynamiques sont caractérisées par le non glissement des particules fluides sur les parois solides et l'imperméabilité de celles-ci, ce qui donne $u=v=0$ sur toutes les parois.

Les conditions aux limites relatives à ce problème sont données par :

$$T = T_c \text{ pour } : y = 0 ; x = 0, 1 \text{ et } y \in [0, 0.75]$$

$$T = T_f \text{ pour } : y = 1$$

Pour les portions adiabatiques

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad ; \text{ Pour } x = 0, 1 \text{ et } y \in [0.75, 1]$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0$$

$$u = v = 0 \text{ pour } x = (0,1) \text{ et } y \in [0, 1]$$

$$u = v = 0 \text{ pour } y = (0,1) \text{ et } x \in [0, 1]$$

Les températures T_f et T_c sont définies par :

$$T_f = A_f \sin(2\pi f t + \phi_f) \text{ et } T_c = A_c \sin(2\pi f t + \phi_c)$$

Avec :

$A(f, c)$, $f(f, c)$ et $\phi(f, c)$ sont successivement les amplitudes, les fréquences et les déphasages des températures froide et chaude.

La résolution numérique du système d'équations est effectuée par une méthode de volumes finis utilisant un schéma d'Euler implicite d'ordre 2 pour la discrétisation temporelle. Certaines variables peuvent présenter de forts gradients, ce qui nécessite l'utilisation d'un schéma de discrétisation spatiale qui soit à la fois stable et non diffusif. Pour cette raison, nous avons utilisé un schéma de type ULTIMATE2D qui associe un schéma convectif décentré quadratique avec une stratégie de limitation de flux. La résolution du couplage vitesse- pression est assurée par l'algorithme SIMPLEX. Le choix d'un pas de temps $\Delta t = 10^{-3}$ et un maillage de 64×64 dans le plan (x, y) a permis d'avoir une description précise des phénomènes thermo-convectifs au sein de la cavité. A chaque pas de temps, les champs

dynamique et thermique sont calculés itérativement jusqu'à ce que le critère de convergence suivant soit satisfait : valeur maximale relative entre deux itérations successives inférieure à 10.

III. RESULTATS ET DISCUSSIONS

Les résultats sont présentés en termes de structure d'écoulement et transfert de chaleur (Nombre de Nusselt)

A. Effet des fréquences de modulation des températures sur l'écoulement et le transfert thermique

Dans cette section les valeurs de A_f et A_c sont maintenues, le nombre de Rayleigh variant de 10^3 à 10^5 . On considère l'effet de différentes valeurs des fréquences des températures froide et chaude sur l'écoulement et le transfert thermique.

Quand nous observons les courbes relatives à la fonction courant maximales en fonction du temps représentés dans la figure (4) pour différentes valeurs de la fréquence de modulation des températures froides et chaudes nous constatons que toutes les solutions ont la même forme indépendamment de ces fréquences. Ils passent toutes par un régime transitoire caractérisé par un état intermédiaire stationnaire avant de passer au régime établi. La durée de ce régime dépend des valeurs des fréquences de modulation des températures T_c et T_f . Concernant le temps adimensionnel nécessaire au développement du régime permanent, il est montré que ce dernier dépend de Ra et des fréquences de modulation des températures de chauffe et de refroidissement.

Les courbes indiquent également que toutes les solutions sont périodiques et oscillent autour de leurs valeurs moyennes égales à celle du régime stationnaire. La fréquence de ces oscillations est égale au minimum des deux fréquences f_c et f_f tandis que le maximum assure la modulation en amplitude de la solution.

Nous présentons dans la figure (3) l'écoulement sous forme de lignes de courant pour le cas correspondant à la fréquence de modulation de la température froide $f_f = 10$ et ce pour différentes valeurs de la fréquence de modulation de la température chaude f_c .

Nous constatons que pour $Ra=10^3$ les lignes de courants sont sous forme de deux cellules symétriques tournantes dans deux sens contraires.

Pour $Ra=10^4$, l'écoulement est dominé par une seule cellule dite cellule principale tournant dans le sens trigonométrique pour les valeurs basses de la fréquence T_c , au fur et à mesure que cette dernière augmente, nous assistons à l'apparition d'une cellule secondaire dans le coin inférieure gauche de la cavité. Cette cellule secondaire prend de l'ampleur et augmente au détriment de la cellule principale qui disparaît pour laisser toute la place à celle-ci pour les valeurs élevées de la fréquence f_c . En ce qui concerne le cas du $Ra = 10^5$ la structure du flux est caractérisée par la prédominance d'une seule cellule principale avec l'apparition des petites cellules dans les quatre coins de la cavité. Ces cellules disparaissent complètement pour les valeurs très élevées de la fréquence $f_c > 60$.

On présente dans la figure (4) les variations de $Nu(t)$ et $\psi_{\max}(t)$ pour $Ra = 10^4$

Sur les courbes on note, en régime oscillatoire établi, les solutions correspondantes à $\psi_{\max}(t)$ et $Nu(t)$ oscillent de manière sinusoïdale dans le temps avec une valeur moyenne et une amplitude qui varie en fonction des fréquences des températures f_c et f_f .

Nous constatons que pour les valeurs basses et élevées de f_c et quelque soit la valeur de f_f , la valeur moyenne de ψ_{\max} (figure 4a) est égale à sa valeur en mode stationnaire.

L'amplitude des oscillations de la fonction courant maximale varie en fonction de f_c et f_f . Pour les valeurs fixes de la fréquence f_f , cette amplitude diminue avec la fréquence f_c .

B. Effet des amplitudes des températures sur l'écoulement et le transfert thermique

Dans cette section les valeurs de f_f et f_c sont maintenues, le nombre de Rayleigh variant de 10^3 à 10^5 . On considère l'effet de différentes valeurs des amplitudes des températures froides et chaudes sur l'écoulement et le transfert thermique.

Pour différentes valeurs de l'amplitude de la température chaude nous avons représenté dans la figure 5 la valeur moyenne de la fonction de courant maximale $\psi_{\max}(t)$ pour $A_f = 1$, $f_f = 10$, $Ra = 10^4$ en fonction de la fréquence de la température chaude f_c .

Il est montré que la valeur moyenne de $\psi_{\max}(t)$ est proportionnelle à A_c

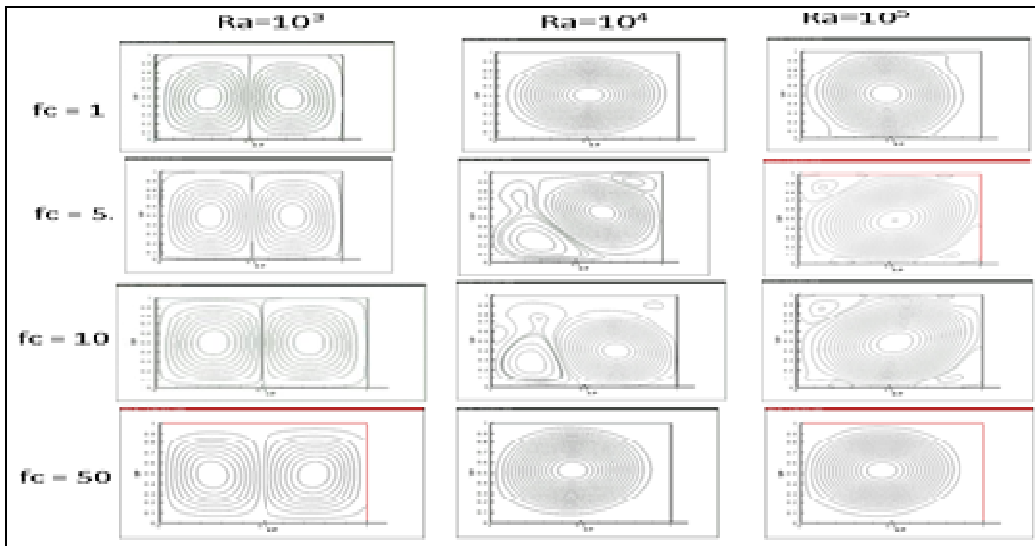
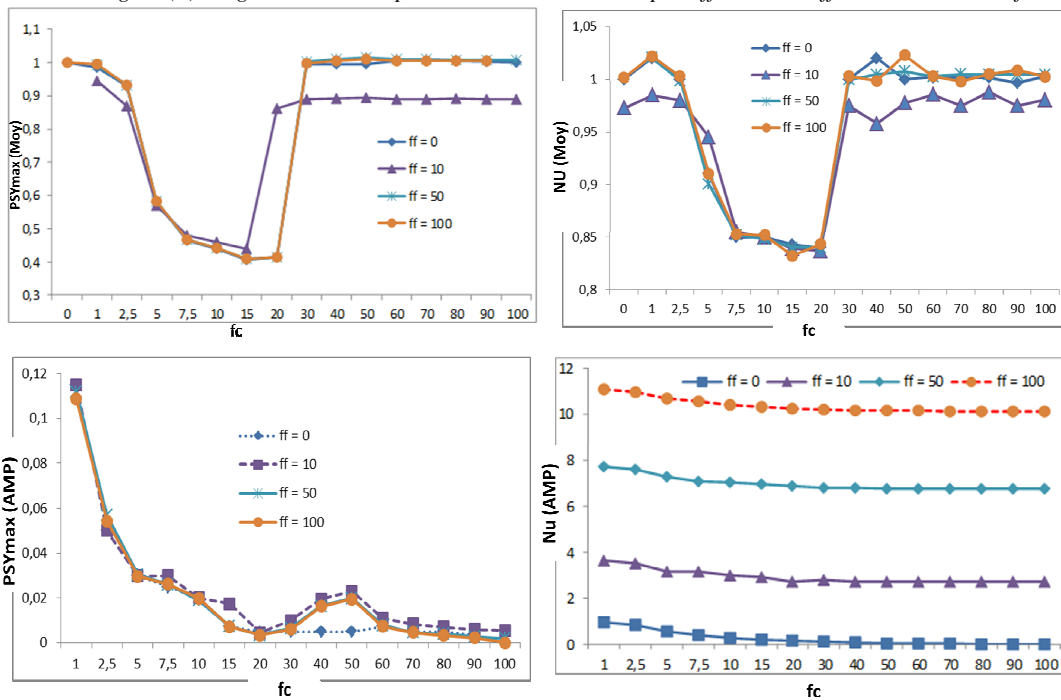


Figure (2) : Lignes de courant pour $Ra = 10^3, 10^4$ et 10^5 pour $ff = 10$ et différentes valeurs de f_c



Fig(4) $G(\psi_{max})$ en fonction de f_c pour différentes valeurs de f_f (a), $A(Nu)$ en fonction de f_c pour différentes valeurs de f_f (b)

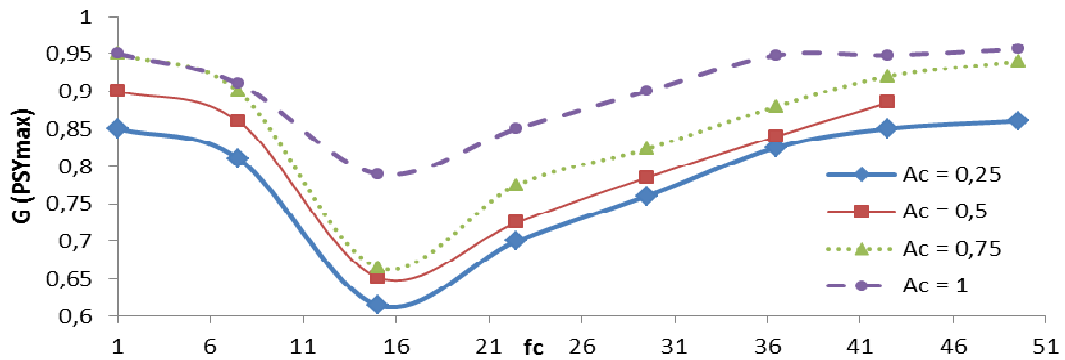


Fig (5) Variation de l'intensité maximale $G(\psi_{max})$ en fonction de f_c pour $Ra=10^4, ff = 10, Af=1$ et différent Ac ($Ra=10^4$)

IV. CONCLUSION

L'étude numérique de la convection naturelle au sein d'une cavité carrée avec chauffage et refroidissement variables a permis de formuler les conclusions suivantes :

- 1- Toutes les solutions obtenues sont périodiques dans le temps, leurs fréquence est égale au minimum des fréquences des températures T_c et T_f : $\text{Min}(f_c, f_f)$
- 2- Les solutions passent par un régime transitoire caractérisé par un état intermédiaire stationnaire avant d'atteindre le régime établi.
- 3- La durée du régime transitoire dépend de la valeur du nombre de Rayleigh et des fréquences de modulation des températures de chauffe et de refroidissement.
- 4- Généralement les valeurs moyennes du transfert thermique et de la fonction courant maximale sont différentes de celles obtenues en régime stationnaire.

V. REFERENCES

- [1] G. Hensen, A. Hellawell, S.Z. Lu, R.S. Steube, Some consequences of thermosolutal convection: the grain structure of castings, *Metall. Mater. Trans. A.*, 27A (3) (1996), 569-581.
- [2] J. Chang, R.A. Brown, Radial segregation induced by natural convection and melt-solid interface shape in vertical Bridgman growth, *J. Crystal Growth*, 63 (1983) 343-364.
- [3] A. Bejan, *Convection Heat Transfer*, Wiley, New York, (1984).
- [4] S.Ostrach, Natural convection in enclosures, *advances in Heat transfer* 8 (1972) 101 – 227
- [5] A. Bejan, *convection Heat transfer*, Wiley 1984.
- [6] N.N.Lin, A. Bejan, Natural convection in a partially divided enclosure, *int. J. Heat Mass transfer* 26 (12) (1983)
- [7] S.Kitamura, A.Bejan, The boundary layer natural convection regime in a rectangular cavity with uniform heat flow from side. *J.Heat transfer* 106 (1984) 96-103
- [8] V.F.Nicolette, K.T Yand, J.R.Lloyd, Transient cooling by natural convection in a two-dimensional square enclosure, *int .J. Heat Mass transfer* 28 (1985) 1721 – 1732.
- [9] D.G Bigggs, D.N. Jones, Two dimensional periodic natural convection in a rectangular enclosure of aspect ratio one, *J.Heat transfer* 107 (1985)
- [10] S. Kitamura, K. Kamomia, T. Sato, Oscillatory convection in rectangular cavity, *Bull. JSME* 106 (1984) 104-108
- [11] D.Poulikakos, Natural convection in a confined fluid space driven by a single vertical wall with warm and cold region, *J. Heat Transfer* 107 (1985) 867 – 876
- [12] J.C. Patterson, on the existence of an oscillatory approach to steady natural convection in cavities, *J. Heat Transfer* 106 (1990) 104 - 108
- [13] J. Patterson, J. Imberger, Unsteady natural convection in a rectangular cavity, *Int. J. fluid Mech* 100 (1990) 65 – 86.
- [14] H.Q. Yang, K.T. Yang, Q. Xia, Periodic laminar convection in a vertical cavity, *int. J. heat Mass transfer* 32 (11) (1989)2199-2207
- [15] M. Kazmierczal, Z. Chinoda, Buoyancy-driven flow in an enclosure with time periodic boundary conditions *Int. J Heat Mass transfer* 32 (1992) 1507-1519.
- [16] J.I. Lage, A. Bejan. The resonance of natural convection in a horizontal enclosure heated periodically from the side, *int. J. heat Mass transfer* 36 (1992) 2027 – 2038
- [17] W.J. mantle-Miller, M.kazmierczak, B.Hiawy, natural convection in a horizontal enclosure with periodically changing bottom wall temperature, *ASME 28th National Heat Transfer Conference, HTD-Vol, 198, Natural convection in enclosure, 1992 pp 49-56*
- [18] E.K. Lakhali, M. hasnaoui, P. Vasseur, E. Belgen, Convection naturelle dans une cellule carrée chauffée périodiquement par le bas : Etude numérique, *Rev. Gén. Therm. Fr.* 392 (393) (1994) 480 – 485 Août – Sept.
- [19] E.K. Lakhali, M. hassnaoui, P. Vasseur, E. Belgen, natural convection in a square enclosure heated periodically from part of bottom wall, *Num. Heat transfer, Part A* 27 (3) (1995) 319 - 333
- [19] Hicham Rouijaa1, Mustapha El Alami2, El Alami Semma3 and Mostafa Najam, “Natural Convection in an Inclined T-Shaped Cavity”, *FDMP journal*, vol.235, no.1, pp.1-14, 2010