Conférence Internationale en Economie-Gestion & Commerce International (EGCI-2017)
International Journal of Economics & Strategic Management of Business Process-ESMB
Vol.9 pp.174-177

Intégration des moments d'ordre supérieur dans l'optimisation de portefeuille

YACIN JERBI
Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax
SFAX ,TUNISIA
Email: jerbiyacin@gmail.com

BEN MEFTAH NADIA
Faculté des Sciences Economiques et de Gestion de Sfax
MAHDIA,TUNISIA
Email: benmeftahnadia@hotmail.fr

***Abstract*—La plupart des modèles en finance sont basés sur l'analyse moyenne-variance(Markowitz1952). L'hypothése de ce modèle est la symétrie de la distribution des rendements ou les investisseurs ont des préférences de type moyenne – variance. Cette approche peut conduire à des résultats peu satisfaisants tenant compte de comportement du marché financier. De ce fait, il est important d'etudier la selection de portefuille dans le cadre Moyenne Variance Skweness Kurtosis. Le but de cet article est d'estimer un modèle de sélection de portefeuille en introduisant l'asymétrie et l'aplatissement dans le probléme d'optimisation de portefuille . La méthode de résolution de ce problème est le Polynomial Gaol Programming . Un exemple de dix titres de la Bourse tunisien sera présenté pour la période allant de janvier 2012 à décembre 2016 .**

Mots clés: Moyenne-Variance ,Skewness, Kurtosis, Polynomial Gaol Programming, Utilité Polynomiale.

I. INTRODUCTION

Le modèle moyenne-variance a été proposé par Markowitz(1952). Depuis ses travaux la plupart des contributions de sélection du portefeuille sont basées seulement sur les deux premiers moments de la distribution de rendement pour la prise de décision. En effet, la distribution peut être complètement décrite par la moyenne et la variance. Cependant des études empiriques ont montré que la distribution des rendements préssente l'asymétrie et l'aplatissement (Mandelbrot (1963), Fama (1965),Campbell (1997), Harvey et Siddique (1999, 2000), Bera (2000).L'asymétrie désigne les préférences des investisseurs. En effet, une asymétrie négative implique une plus grande probabilité que le rendement est négatif qu'a positif. En outre, si le rendement est positivement asymétrique, il indique que les pertes sont petites et les rendements sont très élevés et plus extrêmes. C'est l'aplatissement qui peut refléter l'existence d'événements extrêmes. Mandelbrot (1963), a été le premier à prendre en compte les excès d'aplatissement des données financières. Ses deux moments sont nécessaires pour décrire le comportement du portefeuille.Par conséquent, le modèle moyenne-variance est inadéquate pour la prise de décision (Samuelson (1970). La prise en compte des moments d'ordre supérieur deviennent pertinents à la sélection du portefeuille (Lai, 1991). Kraus et Litzenberger (1976) ont étudié le modèle d'évaluation des actifs financiers (Bera(2000)) à trois facteurs. Lai (1991), Chunhachinda (1997) et Prakash et al. (2003) ont montré que l'incorporation de l'asymétrie dans le portefeuille provoque un changement majeur dans la construction du portefeuille optimal. Scott et Horvath (1980) utilisent les moments d'ordre supérieur dans l'analyse du portefeuille. Ils ont montré que la préférence est positive pour les valeurs positives de chaque moment central impair et négatif pour chaque moment central pair . Par conséquent, l'analyse moyenne-variance a été critiqué pour inclure l'asymétrie et l'aplatissement de rendement en sélection du portefeuille (Yu et al(2008)). L'un des problèmes de l'élargissement du cadre moyenne-variance est la détermination de solution du programme d'optimisation tenant compte de d'asymétrie et d'aplatissement. En effet, le problème d'optimisation est multi-objectif. à fin de les résoudre , de nombreuses approches ont été proposées. L'un des moyens est l'utilisation de la méthode polynomiale de programmation par objectif (PGP). Cette étude étend les travaux de Davies et al(2005) en utilisant l'objectif d'un polynôme, qui intègre la programmation des préférences des investisseurs pour l'asymétrie et l'aplatissement.

II. MODÉLE DE MARKOWITZ

cette section decrit brievement le modéle de Markowtiz (1952).Par la suite ,une nouvelle approche a été developpé en se basant sur des critiques proposé sur ce modéle . les investisseurs ,dans l'approche M-V, choisiront soit le portefeuille avec le plus haut rendement espéré pour un niveau de risque donné, ou vice versa. Le processus de sélection de portefeuille est formulé comme suit :

$$MIN\sum_{i=1}^{n} x_i^2\sigma_i^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j\sigma_{ij} \tag{1}$$

sous contraintes: $\mu_p=\sum_{j=1}^{n} x_j\mu_j$ et $\sum_{j=1}^{n} x_j=1$

III. SÉLECTION DU PORTEFUILLE EN PRÉSENCE DES MOMENTS D'ORDRE SUPÉRIEUR

Dans cette section, l'investisseur choisit le portefeuille optimal de n actifs risqués en présence de l'asymétrie et l'aplatissement de la distribution de rendement. l'hypothése fondamental est la non normalité des rendements. Notre principal intérêt est de déterminer la stratégie de placement de l'investisseur parmi différentes préférences et le poids de l'investissement de chacun des actifs qui devraient être inclus dans le cadre moyenne-variance-asymétrie aplatissement.

ISSN 2356-5608

A. Polynomial goal programming (PGP)

Davies et al (2005) formulent le problème d'optimisation de portefeuille comme suit :

$$MAXZ_1 = X'R_t \tag{2}$$

$$MAXZ_3 = \frac{T}{(T-1)(T-2)} \sum (\frac{X'(R_t - \bar{R})}{\sqrt{X'VX}})^3 \tag{3}$$

$$MINZ_4 = \frac{T(T+1)}{(T-1)(T-2)(T-3)} \sum (\frac{X'(R_t - \bar{R})}{\sqrt{(X'VX}})^4 - \frac{3(T-1)^2}{(T-2)(T-3)} \tag{4}$$

sous contraintes:

$X'VX = A$,$X_i \geq 0$,$\sum_{i=1}^{n} X_i = 1$

Avec :$X' = (X_1, X_2, ..., X_n)$ etX_i la proportion à investir dans le ième actif. L'exposant ' désigne le transposé du vecteur. T est le nombre d'observation. Z_1 est la formule pour le rendement moyen du portefeuille, $X'VX$ est la variance du portefeuille , Z_3 le skewness de portefeuille et Z_4 est l'excès de kurtosis. A désigne le niveau de variance pré-spécifié dans l'optimisation.Dans notre cas , la variance egal à1(Lai 1991). La Combinaison des ses trois objectifs à une seule fonction consiste à introduire la notion de PGP qui peut être exprimé comme suit:

$$MINZ = (1 + d_1)^{\alpha} + (1 + d_2)^{\beta} + (1 + d_3)^{\gamma} \tag{5}$$

sous contraintes:

$$X'\bar{R} + d_1 = Z_1^* \tag{6}$$

$$\frac{T}{(T-1)(T-2)} \sum (\frac{X'(R_t - \bar{R})}{\sqrt{X'VX}})^3 + d_3 = Z_3^* \tag{7}$$

$$\frac{T(T+1)}{(T-1)(T-2)(T-3)} \sum (\frac{X'(R_t - \bar{R})}{\sqrt{(X'VX}})^4 - \frac{3(T-1)^2}{(T-2)(T-3)} + d_4 = Z_4^* \tag{8}$$

d_1,$d_3 \geq 0$, $d_4 \leq 0$ et $X'VX = A$ Où α β et γ sont les préférences des investisseurs non négatifs pour la moyenne, l'asymétrie et le kurtosis de la série des rendements du portefeuille. Z_1^*, Z_3^* et Z_4^* sont respectivement le rendement moyen , la valeur d'asymétrie et la valeur de kurtosis du portefeuille optimal. d_1 et d_3 représentent des écarts positifs par rapport à Z_1^* et Z_3^*. d_4 représente l'écart négatif de Z_4^*. Davies et al (2005) utilisent leur modèle pour résoudre le problème du fonds optimal des portefeuilles de hedge funds Sous la contrainte supplémentaire d'optimisation pour une variance de un (lai 1991). Cette étude compare le résultat de l'optimisation Moyenne-Variance de Markowitz avec la méthodologie Moyenne-Variance Skweness Kurtosis . La résolution du PGP est un processus en deux étapes. Tout d'abord, les valeurs optimales pour Z_1^*; (rendement espéré), Z_3^*; (Asymétrie) et Z_4^*; (Kurtosis), respectivement, sont résolus pour un niveau de variance prédéterminé. Deuxièmement, ces valeurs optimales sont substituées aux contraintes (6),(7) et (8) et une valeur minimale est trouvée pour la dernière fonction objective.

B. Maximisation de l'utilité polynomiale

Nous supposons maintenant que l'asymétrie et la kurtosis sont inclues dans la fonction d'utilité. Nous considérons un investisseur qui alloue son portefeuille pour maximiser l'utilité attendue $U(W)$. Pour évaluer l'importance des moments supérieurs sur la répartition de l'actif, l'utilité attendue est décrite par une extension de la série de Taylor tronquée à l'ordre 4.Nous considérons maintenant un exemple avec une fonction objective plus compliquée. Notre objectif est de maximiser l'expansion du quatrième ordre de la fonction d'utilité attendue de l'Aversion Relative Constante (CRRA) . Selon ses autreus l'eperance d'une fonction d'utilité tenant compte de moment d'odre trois et quatre est decrit comme suit :

$$E(U(w)) = -\frac{\lambda}{2} m_2(w) + \frac{\lambda(\lambda+1)}{6} m_3(w) + \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}{24} m_4(w). \tag{9}$$

IV. ÉTUDE EMPIRIQUE

Le modèle du PGP ci-dessus présenté sera utilisé pour la sélection d'un portefeuille à partir des données de la bourse des valeurs mobilières de Tunis . L'échantillon est composé de 10 entreprises pour la période allant de janvier 2012 à décembre 2016. Dans cette section,le résultat de Markowitz est présenté dans le tableau 1 ainsi les solutions des équations (5), (6) et 7 est dans le tableau 3. Puis, une résolution de(9) avec PGP, les valeurs de l'objectif optimal et le compromis entre eux sont présentés dans le tableau 4.

A. Résultat

1) Résolution de l'optimisation de portefeuille à l'aide de Markowitz: Les compositions de portefuille seront présentés dans le tableau 1. En absence d'effet d'asymétrie et d'aplatissement, l'action SIAME est plus important . En effet ,il correspond au valeur la plus élevé(0.39).

ISSN 2356-5608

TABLE I

RÉSULTATS DE L'OPTIMISATION DU PORTEFEUILLE (MARKOWITZ)

Titres	Proportion
ATB	0.050
ASSAD	0.066
ADWYA	0.056
CARTHAGE CIMENT	0.052
ELECTROSTAR	0.094
ESSOUKNA	0.084
SERVICOM	0.050
SIAME	0.398
SIPHAT	0.052
TUNISSAIR	0.096

TABLE II

DEGRÉ DE PRÉFÉRENCE DES INVESTISSEURS

	Moyenne	Skweness	Kurtosis
Investisseur1	1	3	0
Investisseur1	3	1	0
Investisseur1	1	0	3
Investisseur1	3	2	1
Investisseur1	2	3	1

2) Polynomial Goal Programming: En se déplaçant à la modélisation de portefeuille en présence de moments d'ordre supériieur à deux . Il est important de resoudre en premier temps les problèmes d'optimisation individuels telque la maximisation du rendement du portefeuille et l'asymétrie et la minimisation de l'aplatissement . Afin , de resoudre se problèmes,on passe par un tableau qui regroupe le différent degré de la préférence pour l'investisseur. Des solutions optimales à chacun des problèmes sont donnés dans le tableau 3 . Ce sont les solutions idéales, que nous trouverons à l'aide de programme d'optimisation sur Matlab.

le tableau 2 montre le différent degré de la préférence pour l'investisseur. Comme il a montré Davies et al (2005). L'investisseur 1 a une préférence faible pour la moyenne, élevée pour l'asymétrie, et pas de kurtosis. L'investisseur 2 préfère la moyenne, déteste l'asymétrie et pas de kurtosis. L'investisseur 3 a une préférence élevée pour le kurtosis , faible pour la moyenne et pas de skewness. L'investisseur 4 préfère la moyenne la plus élevée, l'asymétrie moyenne et la kurtosis faible. L'investisseur 5 préfère l'asymétrie élevée,la kurtosis faible et une degré moyenne pour la moyenne.
le tableau 3 montre que l'application de ce modéle sur le marché tunisien nous affirme d'investir sur les differents titres choisis à des proportions trés proche. le tableauIVmontre la résolution de l'équation (9). Il est clair que tenant compte de moment d'ordre supérieur dans la fonction d'utilité montre que l'investiteur investit plus dans l'action de Tunissair.

TABLE III

RÉPARTITION DES PORTEFEUILLES POUR LES CINQ INVESTISSEURS

investisseur	1	2	3	4	5
M	0.00019	0.00019	0.00019	0.00019	0.00019
V	1	1	1	1	1
S	0.02275	-0.6627	-0.6627	-0.6627	-0.6627
K	0.02275	0.02275	0.02275	0.02275	0.02275
poids des titres					
ATB	0	0	0	0	0
ASSAD	0.1250	0.125	0.0938	0.1071	0.1071
ADWYA	0	0.1250	0.0938	0	0
CARTAGE CIMENT	0.1250	0	0.2500	0.2500	0.2500
ELECTROSTAR	0.1250	0.1250	0.0938	0.1071	0.1071
ESSOUKNA	0.1250	0.1250	0.0938	0.1071	0.1071
SERVICOM	0.1250	0.1250	0.0938	0.1071	0.1071
SIAME	0.1250	0.1250	0.1250	0.0938	0.1071
SIPHAT	0.1250	0.1250	0.0938	0.1071	0.1071
TUNISSAIR	0.1250	0.1250	0.0938	0.1071	0.1071

TABLE IV

L'UTILITÉ POLYNOMIALE

titres	proportion
ATB	0.088
ASSAD	0.0585
ADWYA	0.05
Carthage Ciment	0.052
ELECTROSTAR	0.0973
ESSOUKNA	0.0763
SERVICOM	0.13
SIAME	0.1043
SIPHAT	0.1383
TUNISSAIR	0.1972

V. CONCLUSION

Dans ce travail, nous avons procédé à la modélisation et la résolution du problème de sélection de portefeuille à l'aide de PGP. L'approche de markowitz (1952) ainsi que la resolution mono objectif d'optimisation muticritére a donné des résultats ne peut être considérablement reconnu comme satisfaisante.Cette étude montre l'importance d'incorporer les préférences des investisseurs dans la maximisation de l'asymétrie et une minimisation de la kurtosis . Nous introduisons , par la ensuite ,la fonction d'optimisation PGP. Cette approche nous permet de résoudre plusieurs objectifs de portefeuille concurrents et conflictuels basés sur le cadre de moyenne-variance-asymétrie-kurtosis. Enfin, nous considérons la maximisation de l'utilité. Notre analyse empirique montre que l'approche PGP peut efficacement résoudre un problème de portefeuille avec plusieurs objectifs contradictoires et peut trouver un portefeuille optimal et prendre les décisions d'investissement Pour remédier à cette limite nous avons poussé le raisonnement en utilisant dans une deuxième modélisation du problème de sélection de portefeuille, le

ISSN 2356-5608

modèle du Polynomiale gaol programmming incluant les preference des investtisseurs. .

REFERENCES

[1] Davies, RJ, Kat, HM et Lu, Fund of Hedge Funds Portfolio Selection: A Multiple - Objective Approach', Babson Park, USA: Finance Division, Babson College,2004.

[2] Lai T. (1991). Portfolio selection with skewness. Review of Quantitative Finance and Accounting, 1, 293-305.

[3] KRAUS, A., and LITZENBERGER, R. H. (1976): "Skewness Preference and the Valuation of Risk Assets," The Journal of Finance, 31, 1085-1100.

[4] HAAS, M. (2007): "Do Investors Dislike Kurtosis?," Economics Bulletin, 7, 1-9

[5] Jurczenko E. and Maillet B. (2006). Multi-Moment Asset Allocation and Pricing Models. Wiley

[6] Lai K.K, Yu L, and Wang S. (2006). Mean-variance-skewness-kurtosis-based portfolio optimization. Proceedings of the First International Multi-Symposiums on Computer and Computational Sciences - Volume 2 (IMSCCS'06) pp 292-297.

[7] Markowitz H. (1952). Portfolio selection. Journal of Finance, 7, 77-91. Prakash, A.J., Chang C.-H. and Pactwa T.E. (2003). Selecting a portfolio with skewness: Recent evidence from US, European, and Latin American equity markets. Journal of Banking & Finance, 27, 1375-1390.

[8] Samuelson P. (1970). The fundamental approximation theorem of portfolio analysis in terms of means, variances and higher moments. Review of Economic Studies, 25, 65-86.

[9] Machina M. and Müller S. M. (1987). Moment preferences and polynomial utility. Economics Letters, 23, 349-353

ISSN 2356-5608