

# Influence de pas de temps futur et de nombre de thermogramme sur l'identification d'une source de chaleur ponctuelle : résolution d'un problème inverse.

TOUHAMI Younès

Université de Béchar, BP417 BECHAR 08000 ALGERIE

ytouhami@yahoo.fr

**Résumé**— Nous proposons une détermination temporelle d'une source de chaleur au sein d'un milieu diffusif à partir de trois situations de thermogrammes simulés. La méthode repose d'une part sur une technique inverse de l'intégrale de convolution et, d'autre part sur une modélisation directe du système par élément de frontière permettant de générer aisément des sources thermiques ponctuelles.

**Mots clés**— Diffusion thermique linéaire, pas de temps futur, problème inverse, source de chaleur, fonction de Green.

## I. INTRODUCTION

Nous traitons dans cette communication un problème d'identification de sources thermiques (ici volumiques), dans un milieu diffusif 2D, la source est supposée uniforme.

Pour traiter ce problème, nous utilisons une modélisation directe par éléments de frontières [1,2] qui permet, de façon simple, de générer facilement des sources ponctuelles à l'intérieur du domaine étudié. La méthode inverse repose elle sur une inversion de l'intégrale de convolution de type Beck [3]. Dans cette phase d'inversion le système est considéré sous l'aspect monoentré (la source à identifier)-multisorties (les données des températures superficielles et internes).

Pour l'application 2D que nous présentons, nous allons procéder à une quantification de l'amplitude de cette source sur tout l'intervalle de temps considéré.

## II. METHODE D'INVERSION

### A. Intégrale de convolution

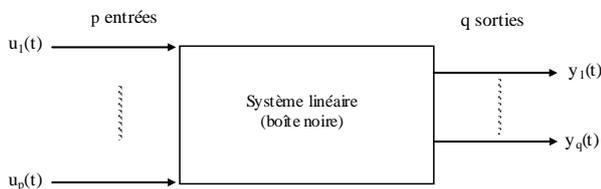


Fig. 1 Principe de la représentation externe

La matrice des réponses impulsionnelles (ou matrice de transfert) est la généralisation sous forme vectorielle, de la fonction de transfert connue sous forme scalaire [6]. C'est une

représentation dite externe, classique en automatique, où le système est considéré comme une "boîte noire" avec ses entrées et ses sorties. Elle permet, pour les systèmes linéaires invariants, de relier un vecteur d'entrée  $u(t)$  à  $p$  composantes à un vecteur de sorties  $y(t)$  à  $q$  composantes, par un produit de convolution. Le schéma de principe est représenté en figure 1.

Connaissant la matrice  $H(t)$ , il est alors classique d'écrire la réponse du système à n'importe quel vecteur  $u(t)$  sous la forme de l'intégrale de convolution :

$$y(t) = \int_{t_0}^t H(t-\tau)u(\tau)d\tau \quad (1)$$

où  $u(t)$  est le vecteur des entrées (dim.p),  $y(t)$  le vecteur des sorties (dim.q),  $H(t)$  la matrice des réponses impulsionnelles (dim.q\*p),  $t$  le temps,  $t_0$  l'instant initial pour lequel  $y(t_0)=0$ . En utilisant dans (1) la matrice des réponses indicelles  $M(t)$ , il vient :

$$y(t) = \int_{t_0}^t -\frac{dM(t-\tau)}{d\tau} u(\tau)d\tau \quad (2)$$

Cette expression constitue en fait une généralisation de l'intégrale de Duhamel [7], les composantes de  $u$  et de  $y$  pouvant être en effet des températures, des densités de flux ou tout autre combinaison de ces 2 grandeurs.

Soit  $\Delta t$  le pas de temps constant. En posant  $t=F\Delta t$  l'instant de calcul et  $\tau=f\Delta t$  le temps courant finis au premier ordre de la dérivée de  $M(t)$ , il vient :

$$\frac{dM(t-\tau)}{d\tau} = \frac{M(F-f+1) - M(F-f)}{\Delta\tau} \quad (3)$$

En supposant  $u(t) = u(f) =$  constante sur l'intervalle de calcul  $f\Delta t$  et reportant (3) dans (2), il vient :

$$y(F) = \sum_{f=1}^F \Delta M_{F-f} u(f) \quad (4)$$

Avec :  $\Delta M_{F-f} = M(F-f+1) - M(F-f)$

Le problème d'inversion consiste alors à traiter l'équation (4) en considérant les sorties connues  $y(F)$  (les thermogrammes temporels) pour remonter aux entrées  $u(f)$  inconnues (les sources thermiques). Suivant la méthode préconisée par Beck [3], nous adoptons ici une résolution séquentielle avec utilisation de pas de temps futurs et de spécification de fonction que nous rappelons ci-dessous.

### B. Résolution séquentielle et spécification de fonction

On cherche à identifier le vecteur  $u$  de façon séquentielle, c'est à dire trouver chronologiquement la suite :  $u(1), u(2), \dots, u(F), \dots$

Soit  $F$  l'instant de calcul courant. Les valeurs de  $u(f)$  pour  $1 \leq f \leq F-1$  sont donc supposées connues. De part l'inertie thermique des systèmes diffusifs, il existe un déphasage entre la réponse  $y(F)$  et l'excitation  $u(F)$  : l'effet de  $u(F)$  ne peut se faire sentir que plus tard au niveau des températures  $y$ .

Pour déterminer  $u(F)$ , il est donc nécessaire de prendre en considération les réponses  $y$  à des instants plus éloignés : c'est la notion de pas de temps futurs. Soit  $R$  le nombre de ces pas de temps futurs. Pour trouver  $u(F)$ , il est alors indispensable de fixer temporairement, pendant le pas de temps calcul  $F$ , la forme de la solution sur ces pas de temps futurs : c'est la notion de spécification de fonction de Beck [3]. L'approche la plus simple consiste à supposer la fonction à identifier constante sur les pas de temps futurs. C'est celle que nous avons retenue et qui est représentée en figure 2. Remarquons qu'il est également possible d'utiliser une variation linéaire de cette fonction, ou encore, une variation polynomiale de degré inférieur au nombre de pas de temps futurs.

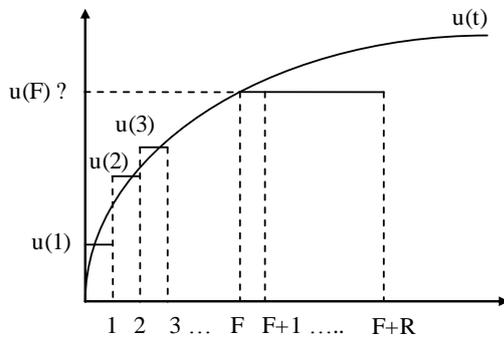


Fig. 2 Spécification de fonction sur les R pas de temps futurs

Pour déterminer le vecteur  $u$  des entrées à l'instant  $F$ , nous allons utiliser l'expression (4) étendue aux pas de temps futurs. Détaillons cette équation en l'écrivant à l'instant de calcul  $F$  sous la forme :

$$y(F) = y^*(F) + \Delta M_0 u(F) \quad (5)$$

$$\text{Avec : } y^*(F) = \sum_{f=1}^{F-1} \Delta M_{F-f} u(f)$$

On écrit maintenant l'équation (5) sur les  $R$  pas de temps futurs supplémentaires :

$$y(F+R) = y^*(F+R) + \Delta M_0 u(F) \quad (6)$$

L'utilisation de pas de temps futur est nécessaire pour tenir compte du déphasage inhérent à la diffusion thermique. Il faut alors fixer a priori, mais temporairement, la forme des inconnues à identifier sur ces pas de temps : en les choisissant constantes égales à  $u(F)$ , on peut alors écrire  $R+1$  équations de la forme (6) se regroupant en :

$$Y = M u(F) \quad (7)$$

Avec :

$$Y = \begin{bmatrix} y(F) - y^*(F) \\ y(F+1) - y^*(F+1) \\ \dots \\ y(F+R) - y^*(F+R) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{bmatrix} M(1) - M(0) \\ M(2) - M(0) \\ \dots \\ M(R) - M(0) \end{bmatrix}$$

A chaque instant de calcul  $F$ , la relation (7) constitue un système de  $q^*(R+1)$  équations à  $p$  inconnues. En général ce système est surdéterminé, c'est à dire que  $q^*(R+1) > p$ , la solution de (7) au sens des moindres carrés, donne :

$$u(F) = (M^T M)^{-1} M^T Y \quad (8)$$

Le problème inverse est donc résolu, à chaque pas de temps  $F$ , en prenant en compte  $R$  pas de temps futurs, par la relation (8). Les réponses indicelles contenues dans la matrice  $M$  sont fournies par la modélisation éléments de frontières explicitée ci-après.

### III. LE MODELE DIRECT PAR ELEMENT DE FRONTIERE

La méthode des éléments de frontière utilisée est la diffusion par intégrale de contour. Parmi les spécificités de cette méthode, l'utilisation de fonction de Green, permettant de traiter de façon simple des sources thermiques ponctuelles. C'est cette dernière propriété qui nous permettra de rechercher la source au sein du milieu.

#### A. Equation intégrale

On considère un domaine  $\Omega$  de contour  $\Gamma$ . Grâce à une double intégration du résidu de l'équation de diffusion, pondérée par une "solution fondamentale"  $T^*$ , il est démontré que cette équation peut être associée, pour tout point  $M$ , à l'équation intégrale suivante [1] :

$$cT_{M,t_F} + \int_{t_0}^{t_F} \alpha T q^* d\Gamma dt = \int_{t_0}^{t_F} \alpha q T^* d\Gamma dt + \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Omega} \alpha b T^* d\Omega dt + \int_{\Omega} T_0 T^* d\Omega \quad (9)$$

Avec :  $T$  : température,  $t$  : temps,  $\alpha$  : diffusivité,  $b$  : source ponctuelle de chaleur,  $q$  : densité de flux sur le contour,  $t_0$  et  $t_F$  : temps initial et final, la condition initiale est prise égale à zéro,  $c=1$  si  $M$  est un point interne du domaine et  $c=0,5$  si  $M$  est un point de contour. La fonction  $q^*$  est la dérivée normale de  $T^*$  sur le contour. La solution fondamentale  $T^*$  est une fonction de Green [7] fonction de l'espace et du temps.

### B. Traitement des sources ponctuelles

Ces termes sources de chaleur se traduisent dans l'équation (7) par l'intégrale de volume  $I_b$  suivant :

$$I_b = \sum_{k=1}^K \int_{t_0}^{t_F} \alpha b_k T_k^* dt \quad (10)$$

$b_k$  représente l'intensité algébrique de chaque source ponctuelle située au point  $M_k$ , on peut écrire l'ensemble de ces sources sous la forme :

$$I_b = \sum_{k=1}^K b_k \delta_{M_k} \quad (11)$$

où  $\delta_{M_k}$  est la distribution de Dirac au point  $M_k$ ,  $T_k^*$  est la valeur de la solution fondamentale au point  $M_k$  et à l'instant  $t$ . Par cette relation, on supprime donc l'intégrale de volume et l'on peut prendre en compte des sources ponctuelles variant temporellement.

Seule la discrétisation de ce contour devient alors nécessaire et celui ci est donc découpé en  $N$  éléments de frontières  $\Gamma_i$ . L'intervalle temporel  $[t_0, t_F]$  est discrétisé en  $F$  pas de temps, cette discrétisation spatiale permet de passer de (9) à une équation matricielle de la forme :

$$H\Gamma_F = G P_F + S_F \quad (12)$$

Avec :  $\Gamma_F$  est le vecteur des  $N$  températures de contour à l'instant  $F$ ,  $P_F$  est le vecteur des  $N$  dérivées normales des températures de contour à l'instant  $F$ ,  $H$  et  $G$  sont des matrices de dimensions  $(N, N)$ ,  $S_F$  est un vecteur (dim. $N$ ) représentant la contribution du terme source réel à l'instant  $F$ .

## IV. LE SYSTEME ETUDIE ET SA MODELISATION

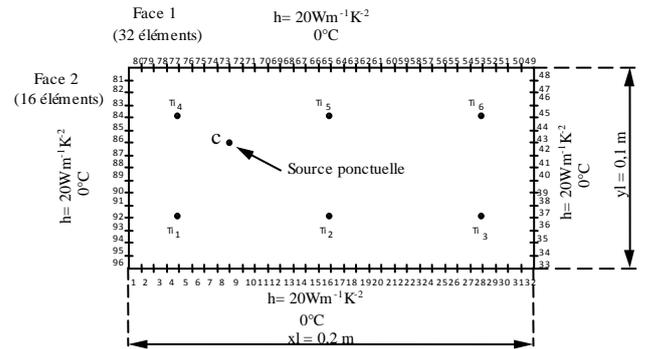


Fig. 3 Le cas test étudié, avec ses conditions aux limites, le maillage éléments de frontière et la disposition des points internes.

Sur la figure 3 sont représentés les différents éléments caractéristiques du problème :

- la géométrie étudiée est une plaque plane rectangulaire de longueur 0,2 m et de largeur 0,1 m. Les caractéristiques thermophysiques choisies sont relatives à un matériau de construction de type plâtre. Les valeurs sont [4]:

- conductivité thermique :  $\lambda = 1,5 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$
- masse volumique :  $\rho = 2300 \text{ kg.m}^{-3}$
- capacité thermique massique :  $c = 800 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$

- Sur les 4 côtés du rectangle, les conditions aux limites du domaine sont de type Fourier ( $h = 20 \text{ W m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ ), relativement à une température de référence prise égale à  $0^\circ\text{C}$ . A l'instant initial, tout le système est à  $0^\circ\text{C}$ .

- La source ponctuelle centrée au point  $C$  :  $x_C = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ ,  $y_C = 6,25 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ .

- Pour modéliser ce système par éléments de frontières, le contour a été discrétisé en 96 éléments égaux et rectilignes pour le rectangle. En plus des températures sur ces éléments, six points internes ont été considérés dans la structure. Ceux ci serviront pour la simulation de températures internes.

Soit  $P(t)$  la puissance émise par cette source en fonction du temps. On se donne pour  $P(t)$ , sur l'intervalle de temps  $[0-6800\text{s}]$ , une succession de 2 échelons suivis d'une rampe décroissante :  $P(t) = 100\text{W}$  pour  $0 < t \leq 2000\text{s}$ ,  $P(t) = 200\text{W}$  pour  $2000\text{s} < t \leq 4000\text{s}$ ,  $P(t) = 200 \cdot (3-t/2000)$  pour  $4000\text{s} < t \leq 6000\text{s}$ ,  $P(t) = 0$  pour  $t > 6000\text{s}$  (Cf.fig. 4).

### A. Les différents problèmes inverses traités

Pour quantifier la source thermique, nous proposons ici plusieurs situations de mesures simulées correspondant à différents types de mesure. On se donne :

- **cas I** : les températures sur la face 1 et 2, simulant une mesure par thermographie infrarouge sur ces 2 faces (48 thermogrammes),

- **cas II** : les thermogrammes aux six points internes  $T_{i_1}$  à  $T_{i_6}$  à l'intérieur du système, simulant des mesures par

thermocouples,

• **cas III** : les températures sur la face 1, associées à deux points interne ( $T_{i_1}$  et  $T_{i_6}$ ), soit 34 points.

Dans ces trois cas, il s'agit donc, à partir de ces températures (les effets) de "remonter" à la source (la cause).

### V. RESULTATS

La source ponctuelle étant localisée [4,5], on applique alors la méthode d'inversion sur tout l'horizon temporel avec des thermogrammes bruités (bruit additif aléatoire gaussien à  $2\sigma=0,1^\circ\text{C}$ ) car sans bruit de mesure les résultats obtenus [3] montrent de bonnes concordances, au niveau des sources identifiées. Nous avons utilisé  $R=1$  puis  $R=2$  pas de temps futurs. Nous présentons pour chaque cas (figures 4, 5 et 6) la valeur de la source comparée ( $SP_{\text{ident}}$ ) à la courbe théorique ( $SP_{\text{origine}}$ ) utilisée pour le modèle direct, ainsi que l'écart quadratique sur les sources  $e_s$  (en W/m) défini par :

$$e_s = \left( \frac{\sum_{f=1}^F \left( SP_{\text{ident}}(f) - SP_{\text{origine}}(f) \right)^2}{F} \right)^{1/2} \quad (13)$$

$f$  étant l'instant courant et  $F$  le nombre de pas de temps utilisés.  $SP_{\text{ident}}(f)$  et  $SP_{\text{origine}}(f)$  représentant respectivement les valeurs discrètes de la source ponctuelle et de la source ponctuelle d'origine à l'instant  $f$ . Cette comparaison est évidemment de nature énergétique (en W/m).

• **cas I** : les températures sur la face 1 et 2 (48 points) :

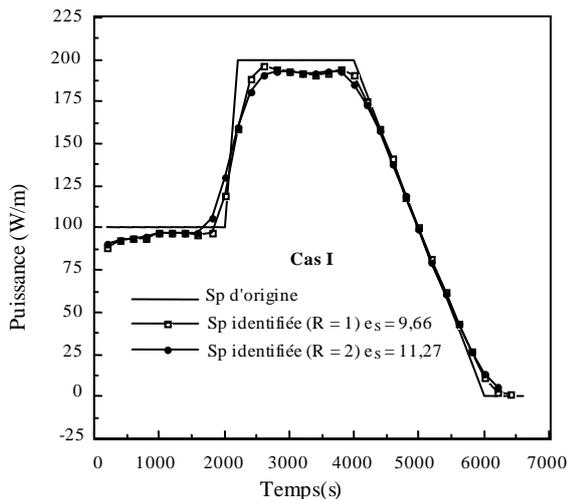


Fig. 4 Comparaison des sources ponctuelles d'origine et identifiée (cas I). A partir de thermogrammes bruités ( $2\sigma=0,1^\circ\text{C}$ ). Influence des temps futurs ( $R=1$  et  $2$ )

• **cas II** : les thermogrammes aux x points internes (6 points) :

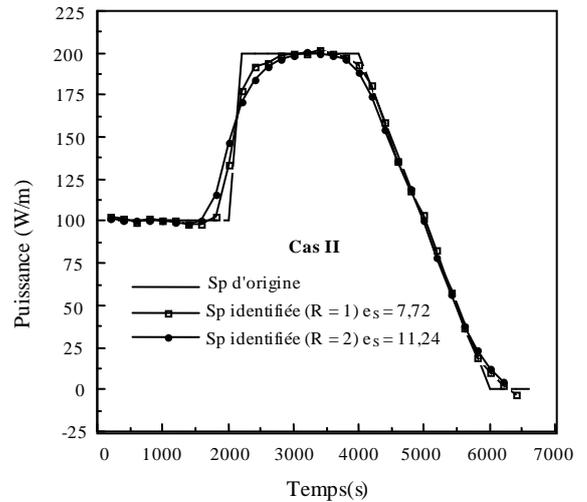


Fig. 5 Comparaison des sources ponctuelles d'origine et identifiée (cas II). A partir de thermogrammes bruités ( $2\sigma=0,1^\circ\text{C}$ ). Influence des temps futurs ( $R=1$  et  $2$ )

• **cas III** : les températures sur la face 1, avec deux points interne  $T_{i_1}$  et  $T_{i_6}$ , (34 points) :

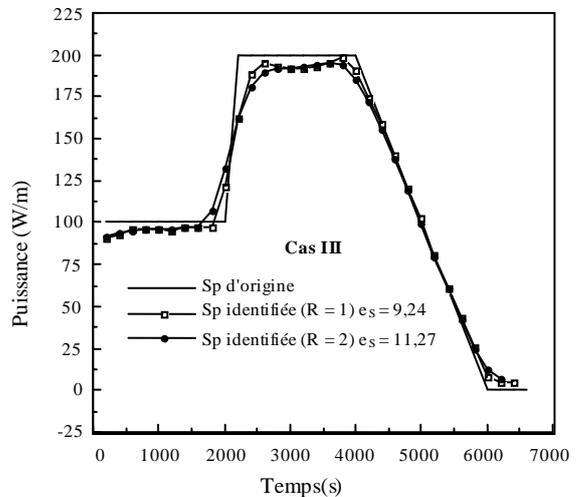


Fig. 6 Comparaison des sources ponctuelles d'origine et identifiée (cas III). A partir de thermogrammes bruités ( $2\sigma=0,1^\circ\text{C}$ ). Influence des temps futurs ( $R=1$  et  $2$ )

Dans le tableau 1, nous avons regroupé les différents écarts quadratiques moyens  $e_s$  calculés avec l'équation (13).

TABLE I  
ECARTS QUADRATIQUES MOYENS  $e_s$  (W/m)

	Cas I	Cas II	Cas III
R = 1	9,66	7,72	9,24
R = 2	11,27	11,24	11,27

A. Commentaires des résultats

• L'ensemble de ces courbes (figures 4 à 6) montrent de bonnes concordances, au niveau des sources identifiées. Sauf pour les cas I et III, le 1er échelon sur la source est un peu moins identifié. Ceci est dû au fait que les températures à 1000s n'ont encore pas atteint le régime asymptotique.

• Les meilleurs résultats sont obtenus pour le cas II où seules des températures internes sont mises en jeu. Maintenant le rapport signal sur bruit joue en faveur de ce cas pour lequel il y a un capteur beaucoup plus proche de la source ( $T_{i_4}$ ).

• L'adjonction de pas de temps futurs régularise la solution (plus lissée).

• Dans la pratique la source étant inconnue, le seul moyen de contrôle que l'on possède, est relatif aux résidus sur les températures donnés par l'équation (14). Regroupons ces différents écarts quadratiques moyens  $e_T$  sur les températures dans le tableau II pour R=1.

$$e_T = \left( \frac{\sum_{f=1}^F \sum_{i=1}^q (T_i(f) - T_i^*(f))^2}{q * F} \right)^{1/2} \quad (14)$$

TABLE III  
ECARTS QUADRATIQUES MOYENS  $e_T$  (°C)

	Cas I	Cas II	Cas III
R = 1	0,362	0,123	0,232

• l'analyse de ce tableau permet, là encore, de constater que le cas II est meilleur dès qu'on est en présence de bruit. Pour ce meilleur cas, on présente sur la figure 7 des exemples de thermogrammes reconstruits à partir de l'identification avec l'écart quadratique moyen  $e_T$  (en °C) correspondant aux thermogrammes d'origine.

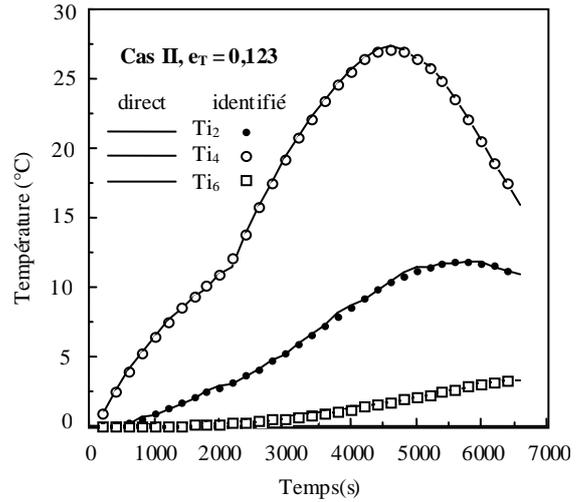


Fig. 7 Cas II. Évolutions des 3 températures internes : Comparaison des mesures simulées et des identifications  $2\sigma=0,1^\circ\text{C}$  et R=1

VI. CONCLUSIONS

• Pour identifier l'intensité de la source, il faut regarder la distance source-capteur. C'est le cas qui possède la plus courte distance qui permet la meilleure identification. Ce n'est alors pas une question de nombre de capteurs, c'est pourquoi le cas II ( $T_{i_4}$  est le plus proche) présente les meilleurs résultats.

• Par ailleurs, remarquons que les capteurs internes sont probablement plus sensibles à l'amplitude de la source; en effet ils ne sont soumis qu'au phénomène de transfert conductif, alors que les capteurs de surface sont en plus le siège d'échanges convectifs.

• Le pas de temps futur peut être utilisé pour régulariser l'identification de la source ponctuelle même en présence de bruit de mesure.

REFERENCES

- [1] R.PASQUETTI and C.LE.NILIOT, *Boundary element approach for inverse conduction problems: application to a bidimensionnal transient numerical experiment*, Numerical Heat Transfert, Part B, 1991, vol.20, pp169-189.
- [2] D.PETIT, V.DEBRA, C.LE.NILIOT and R.PASQUETTI, *Identification of Local Heat Transfert Coefficient using a Boundary Formulation*. Computational Methods in Heat Transfert, Milan, Juillet 1992.
- [3] J.V.BECK, B.BLACKWELL, C.R.St.CLAIR, *Inverse heat conduction, ill posed problems*. Wiley Interscience, 1985.
- [4] Y.TOUHAMI, *Identification spatio-temporelle d'une source de chaleur dans un milieu diffusif par résolution d'un problème inverse*. Thèse de doctorat, Université de Provence, Marseille, France, 1996.
- [5] D.PETIT, Y.TOUHAMI and C.LE.NILIOT, *Détermination d'une source de chaleur par résolution d'un problème inverse : Localisation et quantification*. Rencontre de la SFT, 1994.
- [6] P.DE LARMINAT and Y.THOMAS, *Automatique des systèmes linéaires*. Tomes 1,2,3 Flammarion, 1977.
- [7] M.N.ÖZISIK, *Heat Conduction*. Wiley interscience, 1990.